



GeoGebra als Werkzeug in Stochastik

GeoGebra-Tag für Studienseminare

Henrik Ossadnik

29.03.2025 Landau in der Pfalz



R
TU
P
Rheinland-Pfälzische
Technische Universität
Kaiserslautern
Landau



Henrik Ossadnik

RPTU

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern-Landau
Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)
Fortstraße 7, 76829 Landau

h.ossadnik@rptu.de



Website: <https://henrik-ossadnik.de/>



Kontakt: <https://henrik-ossadnik.de/kontakt/>



GeoGebra: <https://www.geogebra.org/u/henossi>

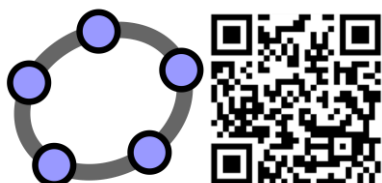
- Promotion im Bereich der **Stochastikdidaktik** zum Thema **„Kernideen zu Hypothesentests vorstellungsbasiert entwickeln“**
- Aktive Arbeit mit **GeoGebra seit 2017**
- Erfahrung im Einsatz von GeoGebra in **Lehr-Lern-Labor Settings**

GeoGebra als Werkzeug in Stochastik

1. Der Wahrscheinlichkeitsrechner
2. Befehle zu Verteilungen in GeoGebra
3. Simulationen von Zufallsexperimenten mit GeoGebra
4. Zusatz: Statistische Datenauswertung mit GeoGebra
5. Abschluss



https://henrik-ossadnik.de/workshops/2025_geogebra-tag_wsstochastik/folien_2025_geogebra-tag_wsstochastik.pdf



GeoGebra-Buch zum Workshop
<https://www.geogebra.org/m/tszauzfu>



**Hinweis: Alle nachfolgenden Aufgaben lassen sich am besten mit dem Computer bearbeiten!
Am iPad gestalten sich einige Anpassungen schwierig.**





Literaturempfehlungen

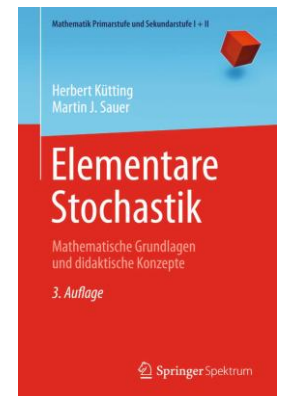


Krüger, Sill & Sikora (2015):
Didaktik der Stochastik in der
Sekundarstufe I. Springer



Eichler & Vogel (2013): Leitidee
Daten und Zufall – Von konkreten
Beispielen zur Didaktik der
Stochastik. Springer

Kütting & Sauer (2013):
Elementare Stochastik –
Mathematische Grundlagen und
didaktische Konzepte. Springer



Praxisartikel:

- <http://www.riemer-koeln.de/cmbasic/>
- <https://www.friedrich-verlag.de/friedrich-plus/sekundarstufe/mathematik/>



Empfehlungen

- <https://geogebra.github.io/docs/manual/de/>
- [https://geogebra.github.io/docs/manual/de/commands/Wahrscheinlichkeit_\(Befehle\)/](https://geogebra.github.io/docs/manual/de/commands/Wahrscheinlichkeit_(Befehle)/)
- [https://geogebra.github.io/docs/manual/de/commands/Diagramm_\(Befehle\)/](https://geogebra.github.io/docs/manual/de/commands/Diagramm_(Befehle)/)
- [https://geogebra.github.io/docs/manual/de/commands/Statistik_\(Befehle\)/](https://geogebra.github.io/docs/manual/de/commands/Statistik_(Befehle)/)

Hilfreich für die Erstellung von Simulationen

- [https://geogebra.github.io/docs/manual/de/commands/Liste_\(Befehle\)/](https://geogebra.github.io/docs/manual/de/commands/Liste_(Befehle)/)
- [https://geogebra.github.io/docs/manual/de/commands/Skripting_\(Befehle\)/](https://geogebra.github.io/docs/manual/de/commands/Skripting_(Befehle)/)

Manual / GeoGebra Handbuch

GeoGebra Handbuch

Dieses Handbuch umfasst alle Befehle und Werkzeuge von unserer GeoGebra App.

Wahrscheinlichkeit (Befehle)

Im Moment gibt es folgende Befehle zur Wahrscheinlichkeit:

- Bernoulli (Befehl)
- Binomial (Befehl)
- BinomialKoeffizient (Befehl)
- Cauchy (Befehl)
- ChiQuadrat (Befehl)
- Dreiecksverteilung (Befehl)
- Erlang (Befehl)
- Exponential (Befehl)
- FVerteilung (Befehl)
- Gamma (Befehl)
- Gleichverteilung (Befehl)

Diagramm (Befehle)

Im Moment gibt es folgende Diagramm Befehle:

- Balkendiagramm (Befehl)
- Boxplot (Befehl)
- DotPlot (Befehl)
- Histogramm (Befehl)
- HistogrammRechts (Befehl)
- Häufigkeitspolygon (Befehl)
- Häufigkeitstabelle (Befehl)

Statistik (Befehle)

Im Moment gibt es folgende Statistik Befehle:

- ANOVA (Befehl)
- ChiQuadratTest (Befehl)
- Effektivwert (Befehl)
- Gauß2Schätzer (Befehl)
- Gauß2Test (Befehl)
- GaußAnteil2Schätzer (Befehl)
- GaußAnteil2Test (Befehl)
- GaußAnteilSchätzer (Befehl)

Liste (Befehle)

Im Moment gibt es folgende Befehle für Listen:

- Anfügen (Befehl)
- AusgewählterIndex (Befehl)
- AusgewähltesElement (Befehl)
- Einfügen (Befehl)
- Einzigartig (Befehl)
- Element (Befehl)
- Entferne (Befehl)
- EntferneUndefiniert (Befehl)
- Erstes (Befehl)
- Folge (Befehl)
- GebundenerRang (Befehl)
- Häufigkeit (Befehl)



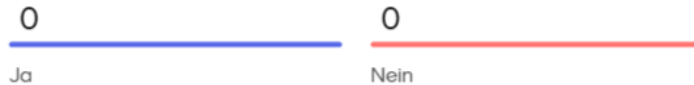
Erwartungen der Teilnehmenden?

Participant's screen

Your screen

<https://www.menti.com/aliwabad5i2a>

Haben Sie schon GeoGebra bei Stochastikthemen verwendet?



Haben Sie schon
GeoGebra bei
Stochastikthemen
verwendet?

Ja



Nein



Submit





Warum GeoGebra bei Stochastik?

Interaktive Visualisierungen

Selbst mit den
Applets
interagieren

Direkte
Beobachtungen von
Veränderungen

Dynamische Simulationen

Verschiedene
Szenarien
ausprobieren

Exploratives
Arbeiten in eigenem
Tempo

Visuelle Unterstützung

Darstellung
abstrakter Ideen

Verdeutlichen
komplexer
Zusammenhänge

Ziel

Bessere Zugänglichkeit mathematischer Konzepte erreichen

1

Der Wahrscheinlichkeitsrechner



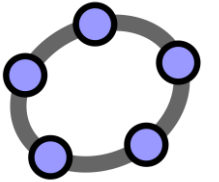
Arbeitsauftrag 1: Den Wahrscheinlichkeitsrechner kennenlernen

- Bearbeiten Sie das **erste Kapitel „Den Wahrscheinlichkeitsrechner kennenlernen“** des **GeoGebra-Buchs**.



GeoGebra-Buch

<https://www.geogebra.org/m/tszauzfu>



- **Beantworten Sie dabei außerdem folgende Fragen für sich:**

- Was kann der Wahrscheinlichkeitsrechner?
- Wo sehe ich hier Anknüpfungspunkte in meinem Unterricht?
- Was fehlt noch?

- **Weitere Informationen zum Wahrscheinlichkeitsrechner**

<https://geogebra.github.io/docs/manual/de/Wahrscheinlichkeitsrechner/>

10 - 15 Minuten





Grenzen und Potenziale des Wahrscheinlichkeitsrechners

■ Was kann der Wahrscheinlichkeitsrechner

- Berechnung von Wahrscheinlichkeiten (auf Basis von Wahrscheinlichkeitsverteilungen)
- Visualisierung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
- Unterstützung der Arbeit in der Sekundarstufe II

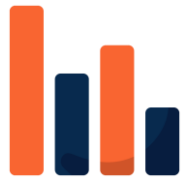
■ Aber

- Fortgeschrittene Konzepte
- „Klassische“ Modelle u.U. nicht direkt anschlussfähig
- Keine Visualisierungsmöglichkeiten für Zufallsexperimente
- Symbolische Ebene fehlend
- Kommunikation mit anderen Ansichten nur bedingt möglich
- Keine Integration empirischer Daten möglich

**Wahrscheinlichkeitsrechner
im Prinzip nur für die
Sekundarstufe II sinnvoll
einsetzbar**

2

Befehle zu Verteilungen in GeoGebra



GeoGebra: Die Binomialverteilung

- GeoGebra hat verschiedene Binomialbefehle, wichtig ist aber insbesondere der Befehl **Binomial(<Anzahl der Versuche>, <Erfolgswahrscheinlichkeit>, <Anzahl der Erfolge>, <Wahrheitswert Verteilungsfunktion>)**
- GeoGebra schlägt den Ausdruck vor, wenn die ersten Buchstaben des Befehls in der *Eingabezeile* eingegeben werden.
- Die berechneten Werte finden sich im Algebra-Fenster.
- Anmerkung: Bei kumulierten Wahrscheinlichkeiten, werden alle Punktwahrscheinlichkeiten von 0 bis k aufsummiert. Ergebnisse müssen damit womöglich zunächst anders interpretiert werden, z.B.
 - $P(X < 34) = P(X \leq 33)$
 - $P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9)$
 - $P(5 \leq X \leq 13) = P(X \leq 13) - P(X \leq 5)$
- **Hinweis:** Für die Berechnung des Binomialkoeffizienten ist **BinomialKoeffizient(<Zahl1>, <Zahl2>)** hilfreich.

<Anzahl der Versuche>	n
<Erfolgswahrscheinlichkeit>	p
<Anzahl der Erfolge>	k
<Wahrheitswert Verteilung>	False \triangleq Punktwahrscheinlichkeit True \triangleq Kumulierte Wahrscheinlichkeit

Erläuterung der Parameter



<Zahl1>	n
<Zahl2>	k

Erläuterung der Parameter





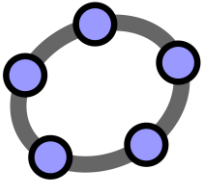
Arbeitsauftrag 2: Verteilungen in GeoGebra kennenlernen

- Bearbeiten Sie das **zweite Kapitel „Verteilungen in GeoGebra“** des **GeoGebra-Buchs**.



GeoGebra-Buch

<https://www.geogebra.org/m/tszauzfu>



Fazit

Zeitaufwändig gute und anschauliche Visualisierungen zu erstellen

In der Schule kaum umsetzbar
(insbesondere nicht durch Schülerhand)

Empfehlung

Arbeit mit fertigen Visualisierungen ...

... für die
Lehrerhand

... zur Erkundung
von Eigenschaften
durch SuS

25 Minuten



3

Simulationen von Zufallsexperimenten mit GeoGebra



Hilfreiche Befehle für die Entwicklung von Stochastik-Applets

Hilfreich für die Erstellung von Simulationen

[https://geogebra.github.io/docs/manual/de/commands/Liste_\(Befehle\)/](https://geogebra.github.io/docs/manual/de/commands/Liste_(Befehle)/)

[https://geogebra.github.io/docs/manual/de/commands/Skripting_\(Befehle\)/](https://geogebra.github.io/docs/manual/de/commands/Skripting_(Befehle)/)

■ Erzeugung von Zufallszahlen in GeoGebra

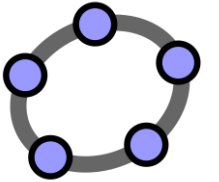
- Zufallszahl(< Minimalwert >, < Maximalwert >, < optional: Stichprobenanzahl >)
- ZufallszahlBinomialverteilt (< Anzahl der Versuche >, < Wahrscheinlichkeit >)
- Zufallszahl Diskret (< Liste1 >, < Liste2 >)
- ZufallszahlGleichverteilt(< Min >, < Max >, < Stichprobenanzahl >)
- ZufallszahlNormalverteilt(< Erwartungswert >, < Standardabweichung >)

■ Wiederholungen von Zufallsexperimenten mithilfe des Folgen - Befehls



Arbeitsauftrag 3: Zufallsexperimente simulieren

- Bearbeiten Sie das **dritte Kapitel „Simulationen von Zufallsexperimenten mit GeoGebra“** des **GeoGebra-Buchs**.



GeoGebra-Buch

<https://www.geogebra.org/m/tszauzfu>

Fazit

Erzeugung der Zufallszahlen setzt meist das Verständnis der Verteilungen voraus

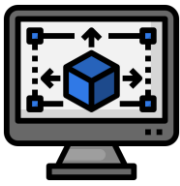
Verständlichkeit für Lernende
Schnell greifbar

Urnenziehung als zentrales Modell bei der Simulation, da hier auch andere Ereignisse (Farben, Tiere und andere „Strings“) gezogen werden können.

Ein Großteil klassischer Zufallsversuche entspricht Prinzip einer Urnenziehung
→ Universeller Einsatz in GeoGebra und im Unterricht

25 Minuten





1

Simulation als Repräsentation von Zufallsexperimenten (z. B. Simulation eines mehrfachen Würfelwurfes)

- **Erzeugung von großen Stichproben z. B. zur Erkundung des Erwartungswert**
 - Erwartungswert eigenständig erfahrbar machen und ihn als Prognosewert für das arithmetische Mittel kennenlernen (Behauptungen werden nachvollziehbar)

2

Simulation als eigenständige besondere Methode zur Lösung von Problemen (als Werkzeug eingesetzt)

- **Erzeugung von Lösungen von Problemen auf die es (noch) keine analytische (kombinatorische) Lösung gibt**

3

Simulation im Wechselspiel mit analytischen (kombinatorischen) Methoden

- **Gegenseitiges Stützen der Simulation und theoretischer Überlegungen**



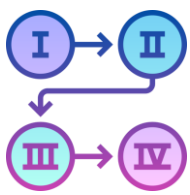
Aktivitätsstufen des Simulationseinsatzes

Aktivität der Lernenden

+

- 1. Experte oder Expertin demonstriert eine Simulation und gibt Beobachtungsaufträge:**
 - die digitale Realisierung wird als *Blackbox* verwendet zur Entdeckung des zugrundeliegenden Modells
- 2. Experte oder Expertin demonstriert eine Simulation und macht den Aufbau transparent.**
 - Experte: Lehrkraft oder aus der Lerngruppe

- 3. Lernende erzeugen Zufallsergebnisse ohne digitale Werkzeuge (händische Sim.)**
- 4. Lernende erzeugen oder wiederholen einen Teil einer Simulation**
 - Z. B. Simulationsergebnisse werden mit Hilfe eines digitalen Werkzeugs erzeugt und danach händisch ausgewertet (halbautomatische Simulation)
- 5. Lernende erzeugen die Simulation vollständig und werten sie digital aus (vollautomatische Simulation)**
 - Erstellung der Simulation eigenständig oder mit Anleitung



Simulationsplan als Strukturierungshilfe

Stochastische Komponenten		Realisierung mit einem Zufallsgerät
M	Modellierung der realen Situation mit zufälligem Ausgang durch ein Zufallsexperiment	
1	Festlegen des Modell-Zufallsexperiments	Wahl geeigneter Zufallsgeräte zur Simulation; Definition eines Zufallsversuchs, das dem Zufallsexperiment entspricht
2	Identifikation interessierender Ereignisse und Zufallsgrößen	Übertragung der Ereignisse und Zufallsgrößen in die Welt der gewählten Zufallsgeräte
3	Wiederholung des Modell-Zufallsexperiments und Sammeln von Daten bezüglich der Ereignisse und Zufallsgrößen	Wiederholung der Simulation; Sammeln von Werten der definierten Ereignisse und Zufallsgrößen
4	Datenanalyse: relative Häufigkeiten (Ereignisse); empirische Verteilungen (Zufallsgrößen)	Auswertung der simulierten Daten
I	Interpretation und Validierung	



Vorteile von Simulationen

**Systematische Betrachtung von
Zufallsgrößen und Verteilungen als
Ganzes anstelle von
Einzelwahrscheinlichkeiten**

**Beobachtung von mehrfacher
Simulation ermöglicht, die
Charakteristika einer Verteilung zu
erkennen**

**Approximation von
Wahrscheinlichkeiten, auch wenn der
Kenntnisstand der Lernenden eine
Berechnung (noch) nicht erlaubt**

**Simulationsplan als Orientierungshilfe für
Lernende zur Modellierung und
Auswertung von Problemen**

4

Zusatz: Statistische Datenauswertung mit GeoGebra (Analysetool)



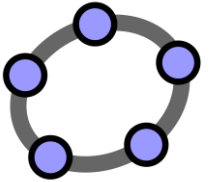
Arbeitsauftrag 4: Statistische Datenauswertung mit GeoGebra

- Bearbeiten Sie das **vierte Kapitel „Statistische Datenauswertung“** des **GeoGebra-Buchs**.



GeoGebra-Buch

<https://www.geogebra.org/m/tszauzfu>



Balkendiagramme

Histogramme

Boxplots

Dotplots

Häufigkeitstabellen

Kurze Diskussion

Was denken Sie über das Analysetool?

10 Minuten



5

Abschluss

Fragen?

Take Home Messages



Take Home Messages

Wahrscheinlichkeitsrechner ist ein sinnvolles Werkzeug in der Sek II

Vorbereitete Materialien verwenden

Urnenmodell als wichtige Grundlage

Anschauliche Visualisierungen hilfreich, aber Erstellung zeitaufwändig

**Unterschiedliches Möglichkeiten
Zufallsexperimente zu erstellen**

Statistische Datenauswertung mit GeoGebra nur eingeschränkt möglich

Rückmeldung

<https://survey.rptu.de/index.php/637429>

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit

Henrik Ossadnik

RPTU

Rheinland-Pfälzische Technische Universität
Kaiserslautern-Landau

Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)

Fortstraße 7, 76829 Landau

h.ossadnik@rptu.de

<https://henrik-ossadnik.de>














RPTU

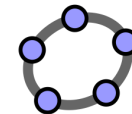


Icons und Bildquellen

Icons von Flaticon <https://www.flaticon.com/de/>

	https://www.flaticon.com/de/kostenlose-icons/buch von Freepik
	https://www.flaticon.com/de/kostenlose-icons/computer von Freepik
	https://www.flaticon.com/de/kostenlose-icons/traum von Freepik
	https://www.flaticon.com/de/kostenlose-icons/warum von Md Tanvirul Haque
	https://www.flaticon.com/de/kostenlose-icons/zaun von Freepik
	https://www.flaticon.com/de/kostenlose-icons/vorteil von Liyuza
	https://www.flaticon.com/de/kostenlose-icons/programmiersprache von Freepik
	https://www.flaticon.com/de/kostenlose-icons/prototyp von surang
	https://www.flaticon.com/de/kostenlose-icons/phase von Freepik
	https://www.flaticon.com/de/kostenlose-icons/phasen von Freepik
	https://www.flaticon.com/de/kostenlose-icons/timer von Freepik

	https://www.flaticon.com/de/kostenlose-icons/kontrollkasten von juicy_fish
	https://www.flaticon.com/de/kostenlose-icons/quelle von Freepik
	https://www.flaticon.com/free-icons/communication von Freepik
	https://www.flaticon.com/free-icons/hard-work von Freepik



GeoGebra-Logo by GeoGebra GmbH



- DZLM Stochastik-Team der Universität Paderborn: Ralf Nieszporek, Dr. Birgit Griese, Prof. Dr. Rolf Biehler: Stochastik kompakt Stochastik mit digitalen Werkzeugen (TI-Nspire CX II, CASIO fx-CG50 und GeoGebra)
- Biehler, R., & Maxara, C. (2007). Integration von stochastischer Simulation in den Stochastikunterricht mit Hilfe von Werkzeugsoftware. *Der Mathematikunterricht*, 53(3), 46-62.