Argumentieren und Beweisen beim Satz des Pythagoras

Mathematik lehren und lernen mit GeoGebra 2026

Henrik Ossadnik

11.05.2026 digital

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Kurzvorstellung

Henrik Ossadnik

RPTU
Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern-Landau
Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)
Fortstraße 7, 76829 Landau

h.ossadnik@rptu.de

Website: https://henrik-ossadnik.de/

Kontakt: https://henrik-ossadnik.de/kontakt/

GeoGebra: https://www.geogebra.org/u/henossi

- Promotion im Bereich der **Stochastikdidaktik** zum Thema **„Kernideen zu Hypothesentests vorstellungsbasiert entwickeln"**
- Aktive Arbeit mit **GeoGebra seit 2017**
- Erfahrung im Einsatz von GeoGebra insbesondere in **Lehr-Lern-Labor Settings**

Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

GeoGebra als Werkzeug in Stochastik

1. Beweisen und Niveaustufen des Beweisens
2. Die Satzgruppe des Pythagoras
3. Beweistypen des Satz des Pythagoras mit GeoGebra-Unterstützung
4. Optionale Vertiefung: Anwendungen des Satz des Pythagoras
5. Abschluss

Folien & Workshopmaterialien

https://henrik-ossadnik.de/workshops/2026_mlulgeogebra_wspythagoras/folien_2026_wspythagoras.pdf

GeoGebra-Buch zum Workshop
https://www.geogebra.org/m/u4wxmtxx

Literaturempfehlungen

Weigand, H.-G., Filler, A., Hölzl, R., Kuntze, S., Ludwig, M., Roth, J., Schmidt-Thieme, B. & Wittmann, G. (2018): Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I. Springer

Vollrath H.-J. & Roth, J. (2012): Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe. Spektrum

Praxisartikel & weitere Quellen:

- https://www.friedrich-verlag.de/friedrich-plus/sekundarstufe/mathematik/
- http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml

1 Beweisen und Niveaustufen des Beweisens

Warum Beweisen?

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

Anwendungsaspekt

- Ist die Allgemeingültigkeit einer Aussage nicht anschaulich klar, so dient ein Beweis dieser Aussage dazu einzusehen, dass die Aussage allgemeingültig ist.
- Ist die Allgemeingültigkeit einer Aussage anschaulich klar, dann kann ein Beweis dazu dienen, zu verstehen, warum die Aussage allgemeingültig ist.

Aspekt des Problemlösens

- Beweisfindung – nicht Beweisdarstellung – steht im Vordergrund
- **Ziel des Beweisens:** Beitrag zu Prozesszielen des Problemlösens

Deduktiver Aspekt

Kann man den Satz mit Hilfe bereits bekannter Sätze herleiten? (Prozessziel des Beweisens)

Struktureller Aspekt

Spielt in der Sekundarstufe I praktisch keine Rolle

Niveaustufen des Beweisens

RPTU Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

präformale, anschauliche Beweise

Stufe des Argumentierens

- Nur mündliche Argumentation
- Bezugnahme auf die Beweisfigur
- Veranschaulichende Hilfsmittel
- Beweisverständnis wird nicht angestrebt
- **Ziel**
  Unterschied zwischen einer Vermutung
  und der Einsicht in das „Warum“ erfahren
- **Tätigkeiten**
  - Argumente angeben
  - Argumente aufgreifen und weiterführen oder widerlegen
  - Beweisgedanken verstehen & in eigenen Worten wiedergeben

Niveaustufen des Beweisens

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

formale Beweise

Stufe des inhaltlichen Schließens

- Notation als Sequenz von Beweisschritten
- Die Schülertätigkeit beschreibende Darstellung
- keine lückenlose Angabe der benutzten Sätze
- Bezug auf die Beweisfigur bei Aussagen zur Anordnung erlaubt
- **Ziel**
  Sicherung und/oder Verständnis der Allgemeingültigkeit
- **Tätigkeiten**
  - Die zum Beweis benutzten Sätze angeben
  - Einen Beweis schriftlich reproduzieren
  - Fallunterscheidungen durchführen
  - einfache Beweise selbst finden

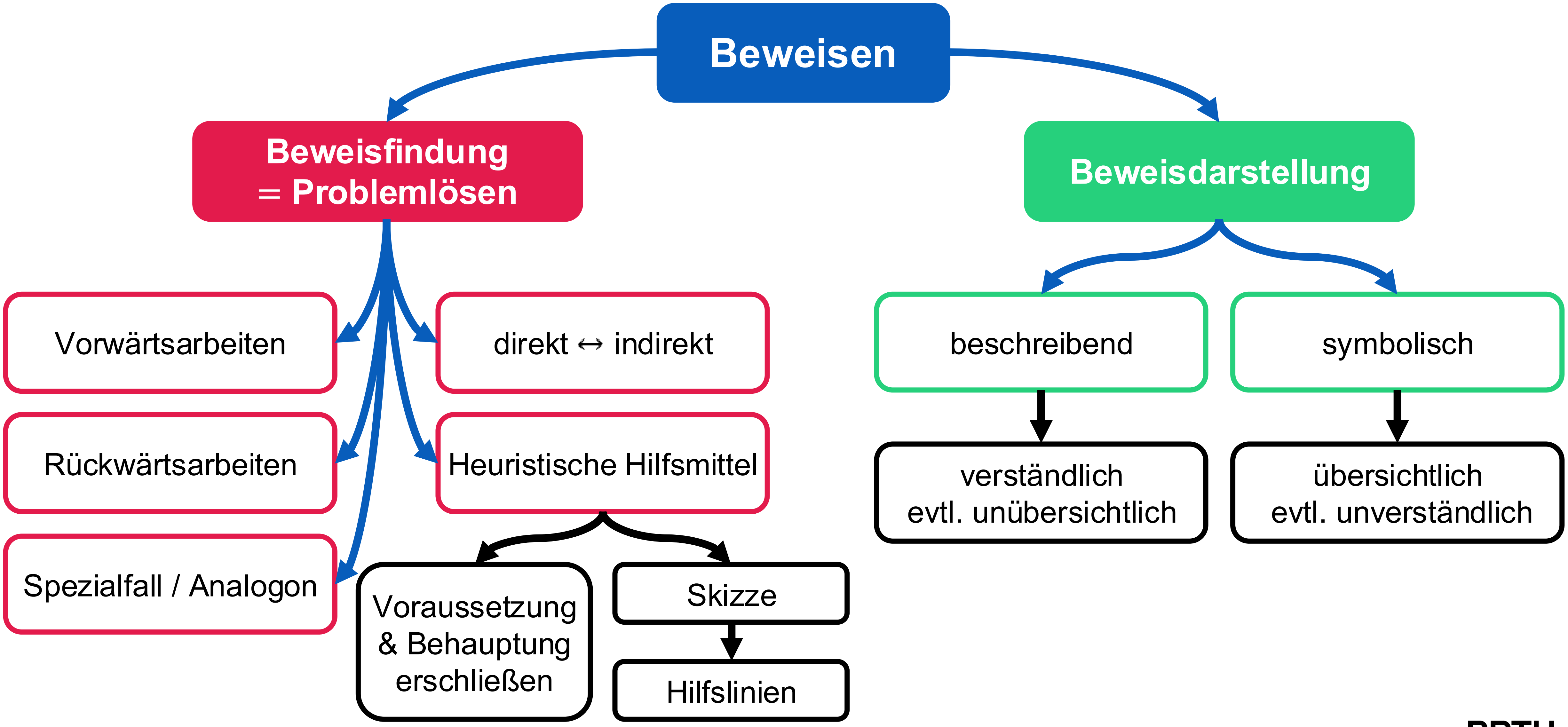
Niveaustufen des Beweisens

postformale Beweise

Stufe des formalen Schließens

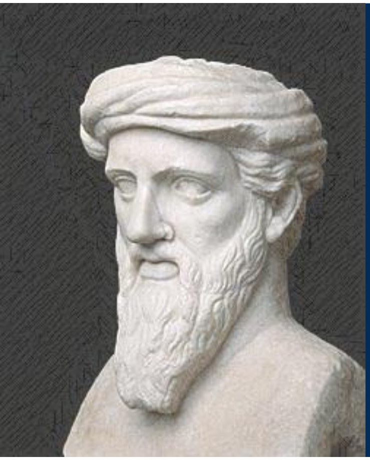
- Beweisen hauptsächlich unter dem Gesichtspunkt der Geometrie als formaler Theorie
- **Ziel**
  - Ein in Beweiszeilen dargestellter Beweis.
  - Jede Zeile ist entweder eine Voraussetzung oder folgt aus darüber stehenden Beweiszeilen.
- **Tätigkeiten**
  - Als Sequenz von Beweiszeilen notieren
  - Auf Schlüssigkeit und Lückenlosigkeit überprüfen
  - Beweise durch Einfügen zusätzlicher Schritte verfeinern
  - Verschiedene Beweise zum selben Sachverhalt im Hinblick auf die verwendeten Beweismittel bewerten

Beweisen als Tätigkeit



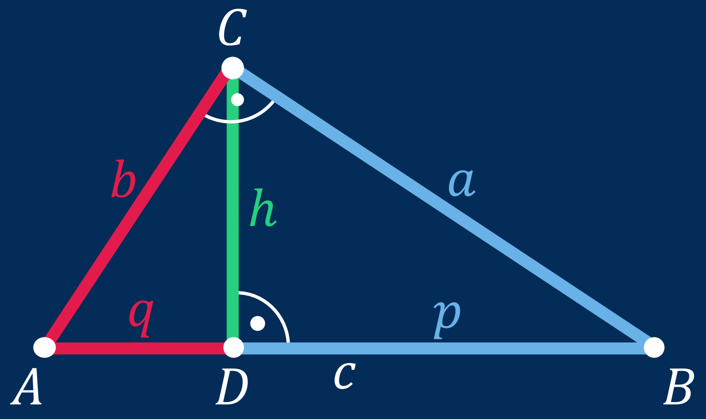
2 Satzgruppe des Pythagoras

Satz des Pythagoras



Satzgruppe des Pythagoras

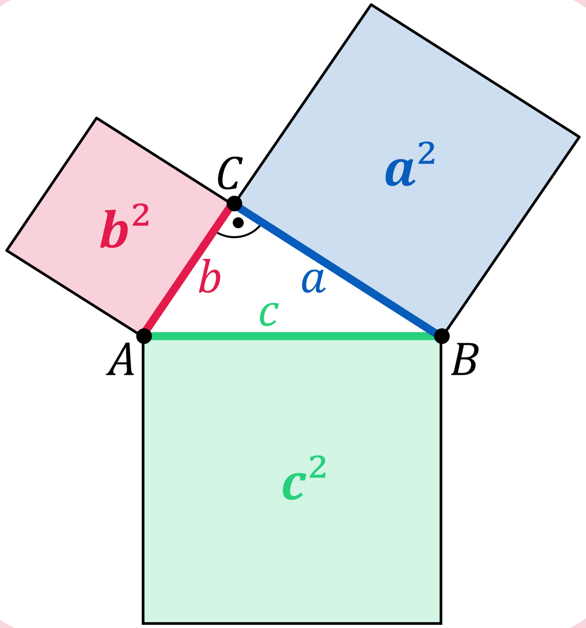
- Bezieht sich auf rechtwinklige Dreiecke.
- Zu ihr gehören folgende Sätze:



Satz des Pythagoras

Bei jedem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den Katheten gleich dem Flächeninhalt des Quadrates über der Hypotenuse.

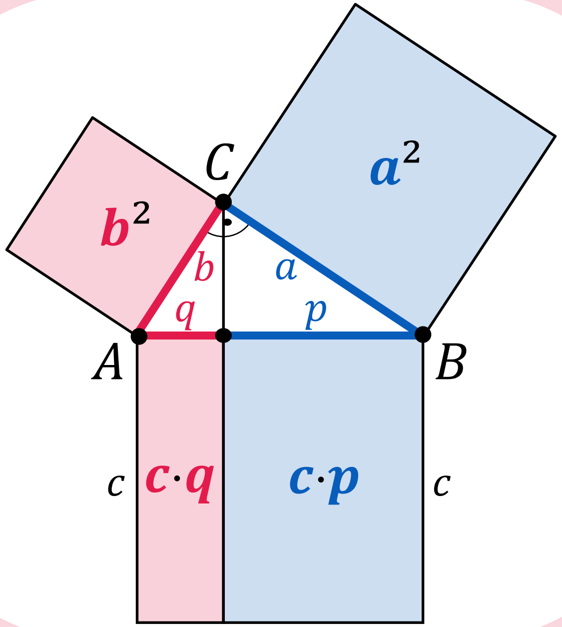
$$a^2 + b^2 = c^2$$



Kathetensatz und Höhensatz

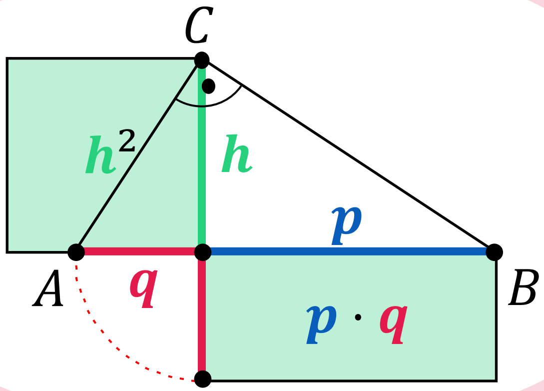
Kathetensatz
Bei jedem rechtwinkligen Dreieck hat ein Kathetenquadrat denselben Flächeninhalt wie das Rechteck aus der Hypotenuse und dem anliegenden Hypotenusenabschnitt.

$$a^2 = c \cdot p \quad \text{und} \quad b^2 = c \cdot q$$



Höhensatz
Bei jedem rechtwinkligen Dreieck hat das Höhenquadrat denselben Flächeninhalt wie das Rechteck aus den beiden Hypotenusenabschnitten.

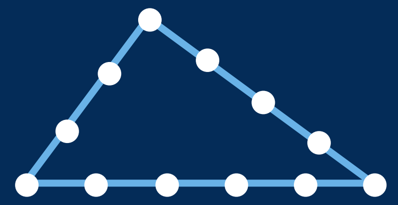
$$h^2 = p \cdot q$$



Logische Struktur der Satzgruppe

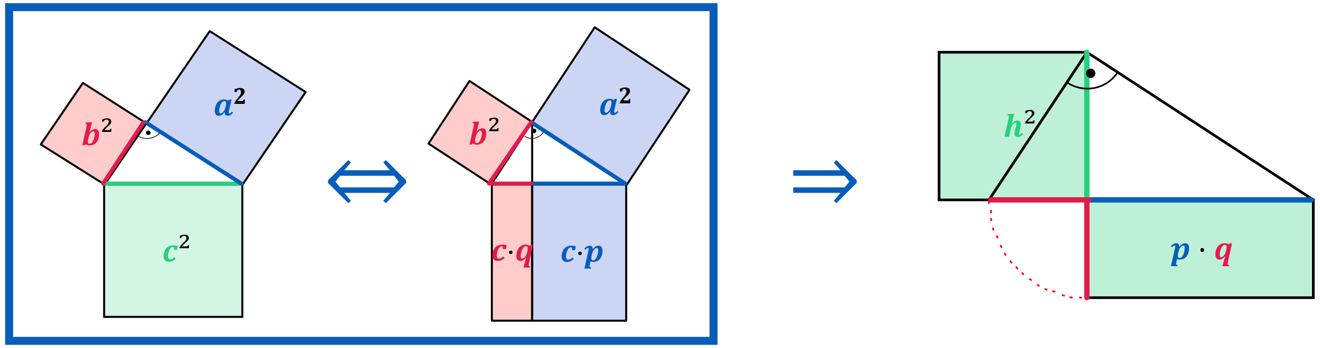
Problematik: Satz ⟷ Kehrsatz

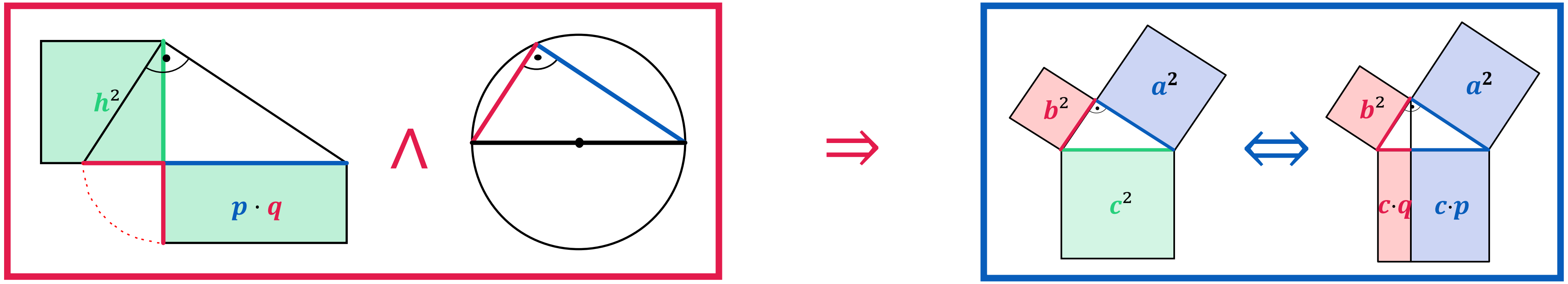
Satz des Pythagoras ⟷ Ägyptische Seilspanner



Logische Abhängigkeit der Sätze

- Satz des Pythagoras ⇔ Kathetensatz
- Satz des Pythagoras ⇒ Höhensatz
- Kathetensatz ⇒ Höhensatz
- Höhensatz ∧ Satz des Thales ⇒ Satz des Pythagoras
- Höhensatz ∧ Satz des Thales ⇒ Kathetensatz





Übergänge in der Satzgruppe des Pythagoras: Beweisideen

Pythagoras ⇒ Kathetensatz bzw. Höhensatz

- Satz des Pythagoras auf die Teildreiecke anwenden
- Arithmetische Umformungen

Höhensatz ∧ Satz des Thales ⇒ Satz des Pythagoras bzw. Kathetensatz

- Geeigneten Thaleskreis einzeichnen
- Höhensatz auf ein geeignetes Teildreieck anwenden

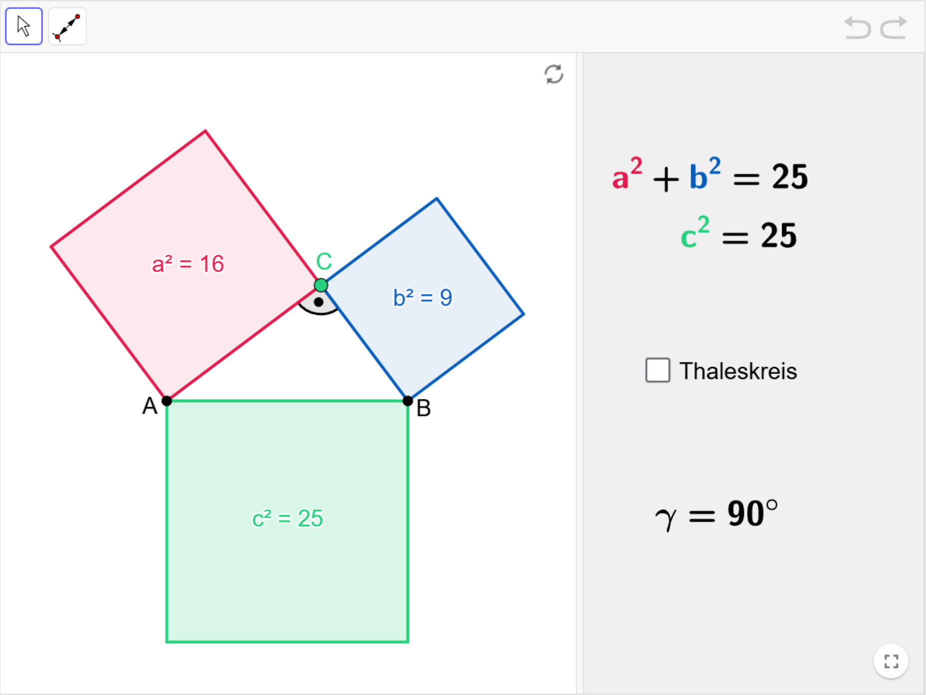
Kathetensatz ⇒ Höhensatz

- Kathetensatz mehrfach auf (Teil-)Dreiecke anwenden

3 Beweistypen des Satz des Pythagoras mit GeoGebra-Unterstützung

Arbeitsauftrag 1:
Einstieg mit GeoGebra-Unterstützung

- Betrachten Sie das Applet in **Kapitel 1: Einstieg** des GeoGebra-Buchs.
- Nehmen Sie Stellung zu der Frage, wie damit ein Einstieg in den Satz des Pythagoras gelingen könnte.
- Reflektieren Sie in diesem Zusammenhang insbesondere den Einsatz von GeoGebra.



GeoGebra-Buch
https://www.geogebra.org/m/u4wxmtxx

6 Minuten

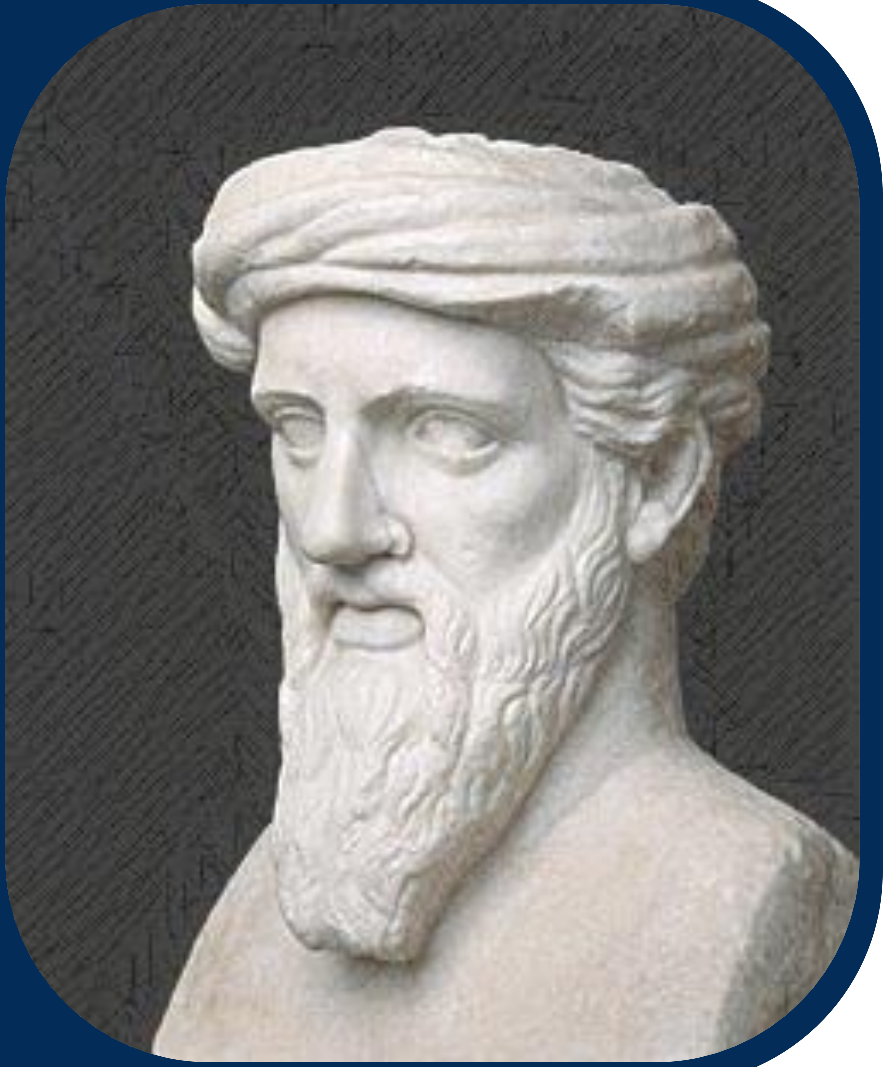
Satz des Pythagoras
Beweistypen bzw. Beweismethoden

(1) Abbildungsbeweis

(2) Prinzip der Zerlegungsgleichheit

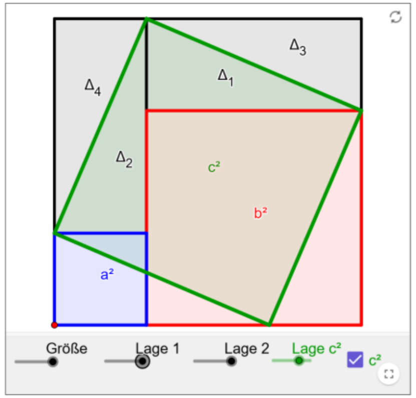
(3) Prinzip der Ergänzungsgleichheit

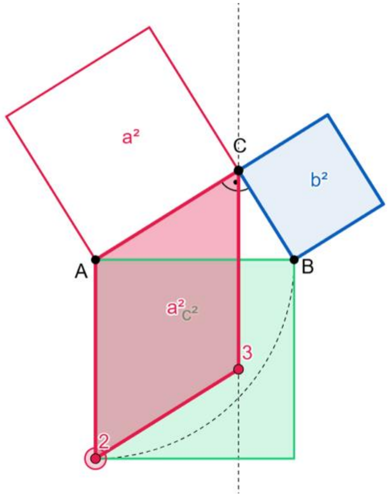
(4) Beweis nach Leonardo da Vinci

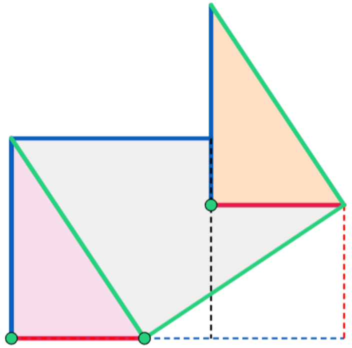


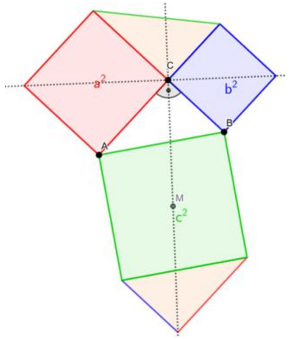
Arbeitsauftrag 2: Beweistypen

- Betrachten Sie die zuvor genannten Beweisen aus **Kapitel 2: Beweistypen** des GeoGebra-Buchs.
- Erfassen Sie jeweils die Beweisidee.
- Nehmen Sie anschließend begründet Stellung, welche Beweise Sie wann auch im Unterricht einsetzen würden.
- Reflektieren Sie anschließend auch hier den GeoGebra-Einsatz und inwieweit und wann GeoGebra hier unterstützt.









GeoGebra-Buch
https://www.geogebra.org/m/u4wxmtxx

30 Minuten

RPTU

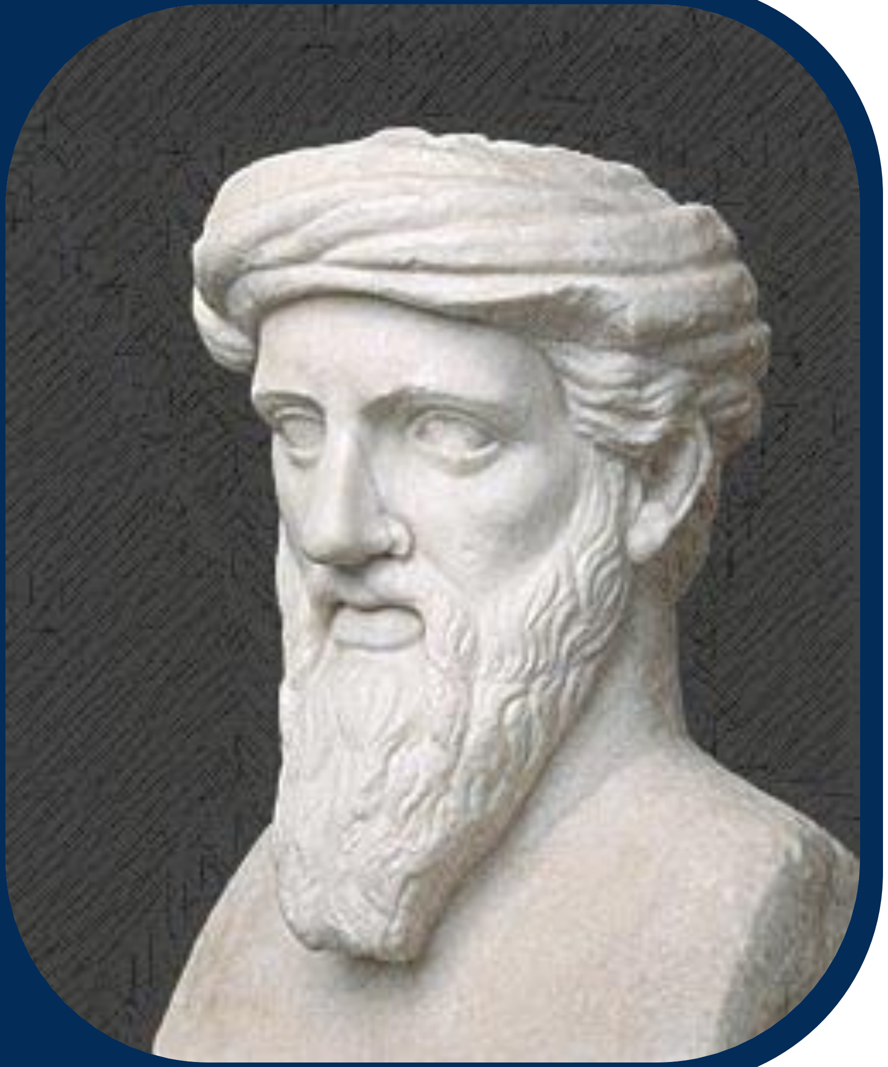
Satz des Pythagoras
Beweistypen bzw. Beweismethoden

(1) **Abbildungsbeweis**

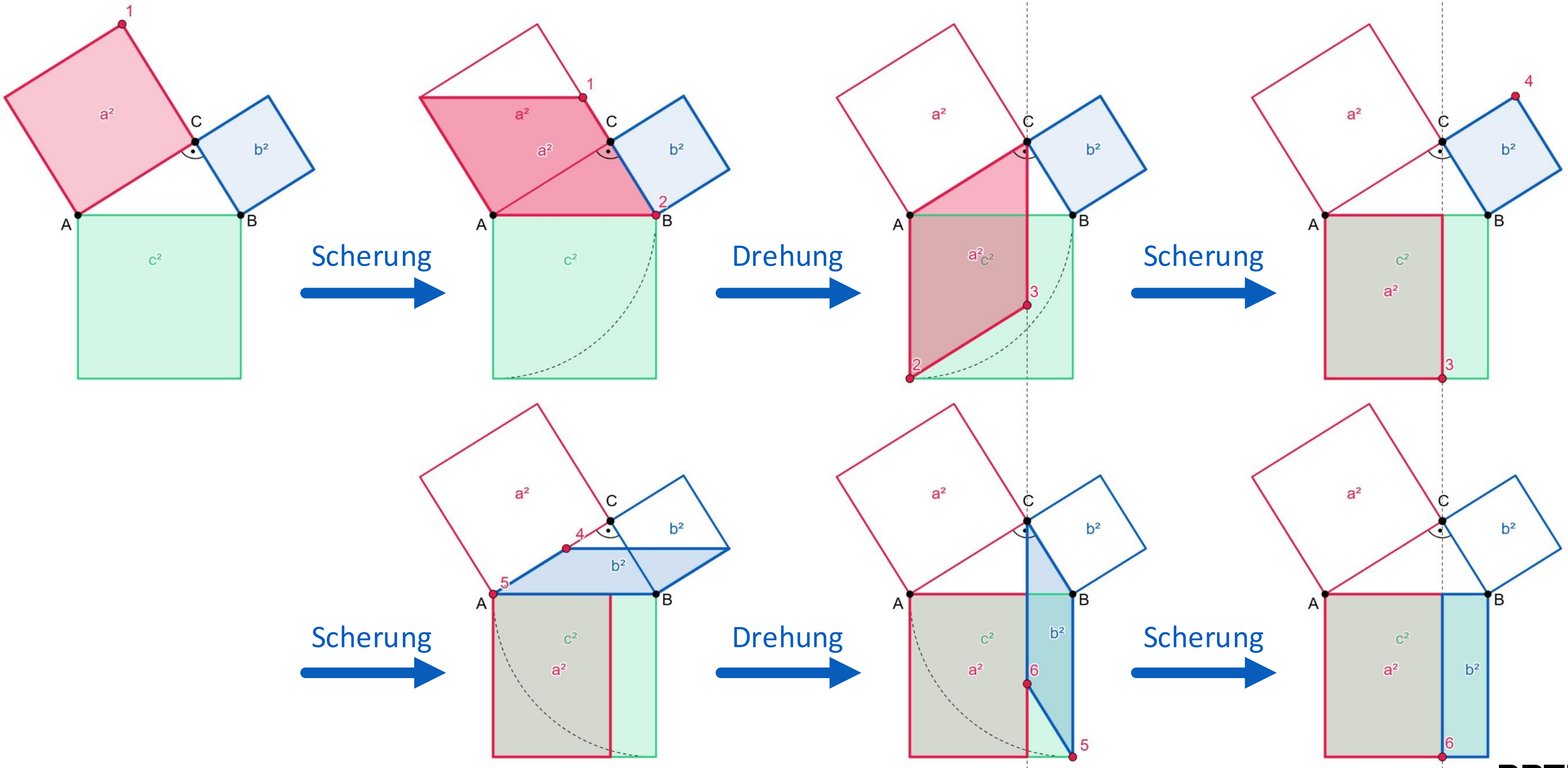
(2) Prinzip der Zerlegungsgleichheit

(3) Prinzip der Ergänzungsgleichheit

(4) Beweis nach Leonardo da Vinci



Abbildungsbeweis
(Im Unterricht über Flächeninhaltsvergleiche)



https://www.geogebra.org/m/u4wmtxx#material/ndadzzhp

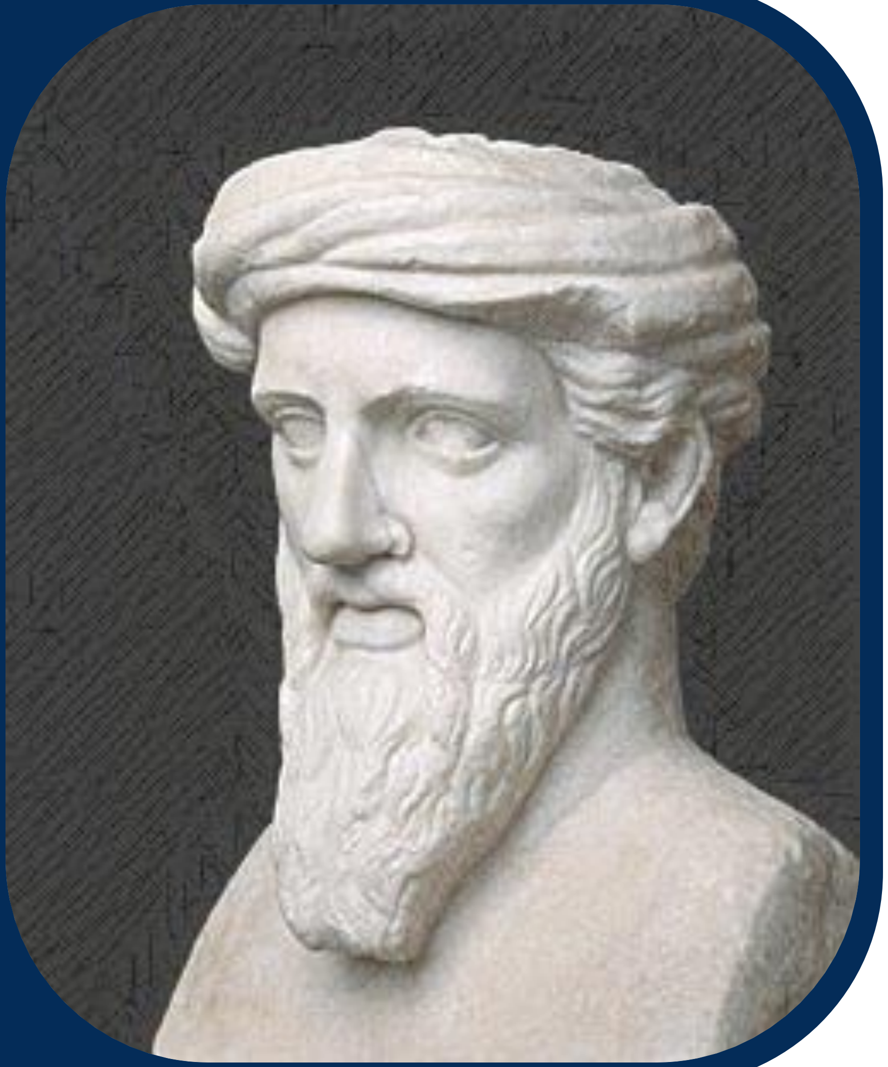
Satz des Pythagoras
Beweistypen bzw. Beweismethoden

(1) Abbildungsbeweis

(2) **Prinzip der Zerlegungsgleichheit**

(3) Prinzip der Ergänzungsgleichheit

(4) Beweis nach Leonardo da Vinci



Prinzip der Zerlegungsgleichheit

Prinzip

- Zwei ebene Figuren sind genau dann flächeninhaltsgleich, wenn sie zerlegungsgleich sind.
- Zwei Figuren sind zerlegungsgleich, wenn sie sich in paarweise kongruente Teilfiguren zerlegen lassen

Vorstellung: Zerschneiden

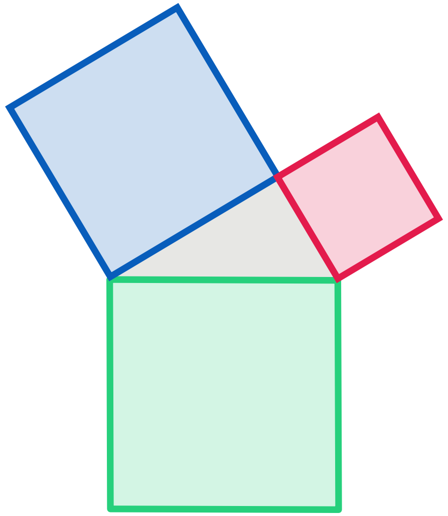
Zwei Figuren sind zerlegungsgleich, wenn man sie so zerschneiden kann, dass aus den entstandenen Teilen die andere zusammengesetzt werden kann.
Die Gesamtfläche bleibt dabei erhalten.

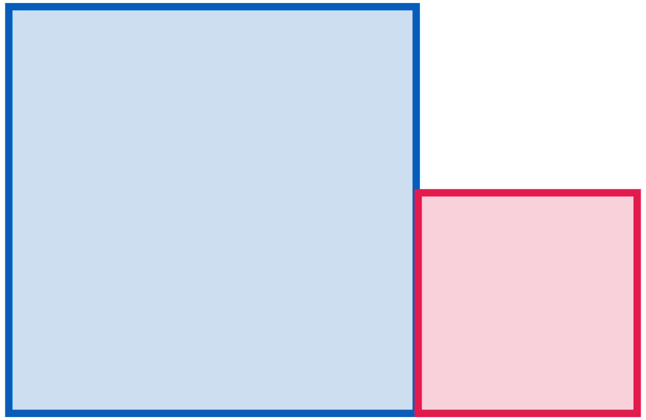
Übertragung & Anwendung

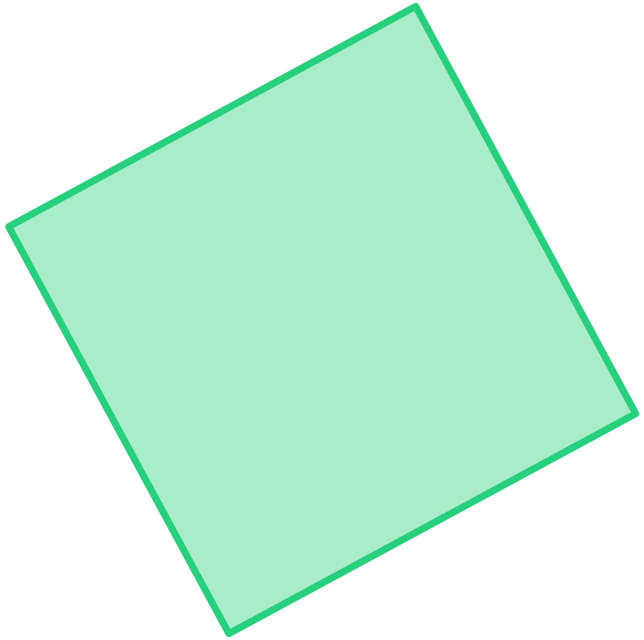
- Zerlege
  - Kathetenquadrate &
  - Hypotenusenquadrat
- so, dass gleiche Teilfiguren entstehen.

Prinzip der Zerlegungsgleichheit

Stuhl der Braut

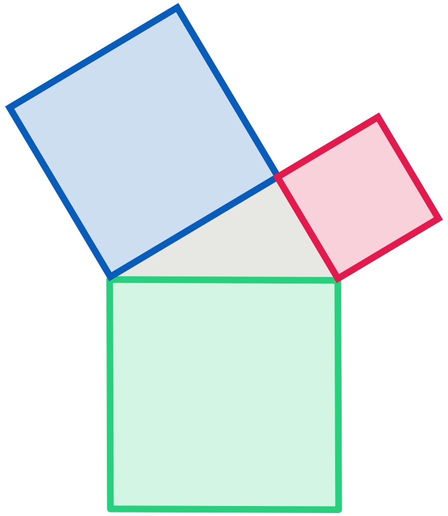


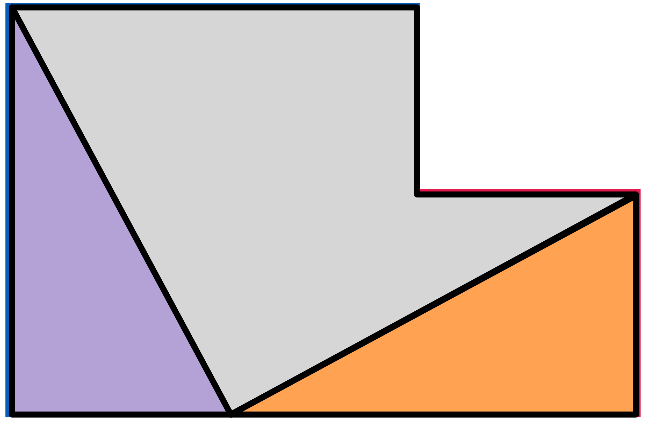


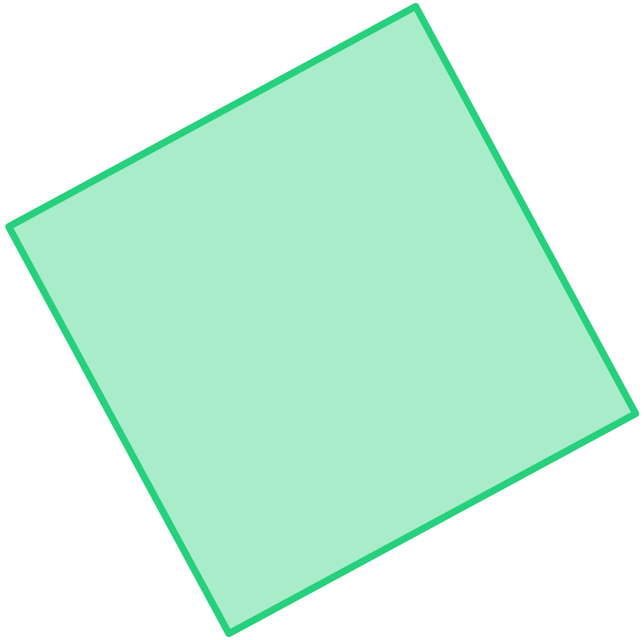


Prinzip der Zerlegungsgleichheit

Stuhl der Braut

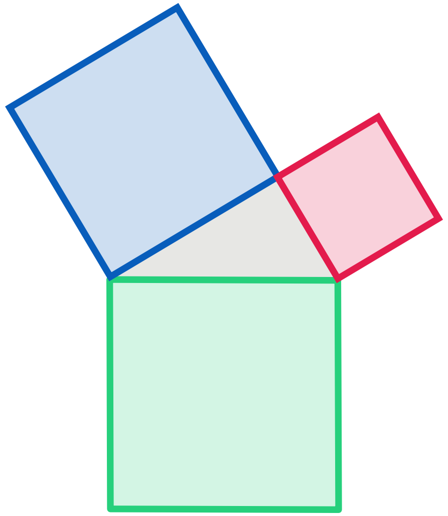




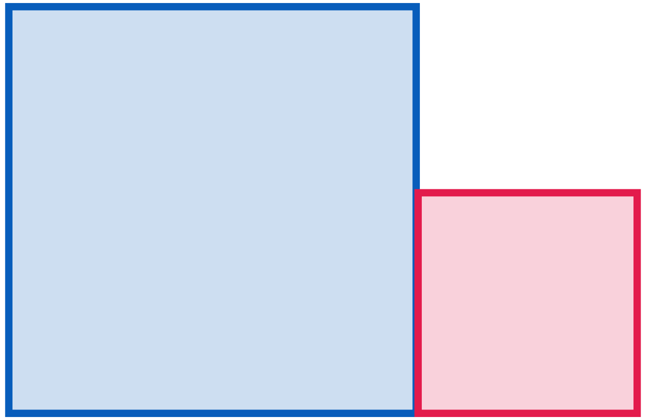


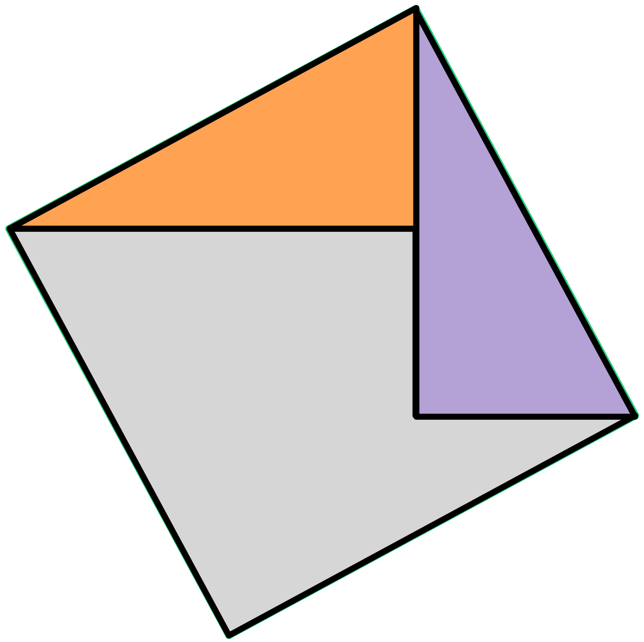
https://www.geogebra.org/m/zmrcqcnr

Prinzip der Zerlegungsgleichheit



Stuhl der Braut





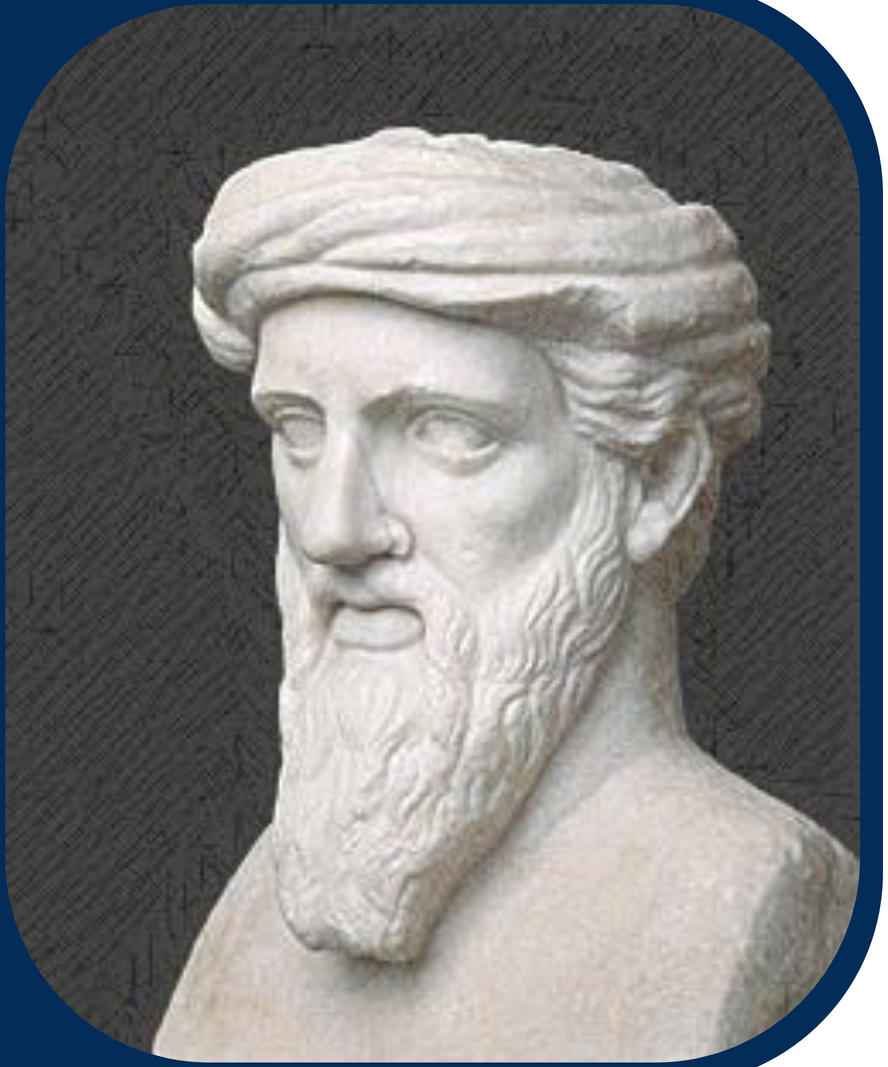
Satz des Pythagoras
Beweistypen bzw. Beweismethoden

(1) Abbildungsbeweis

(2) Prinzip der Zerlegungsgleichheit

(3) **Prinzip der Ergänzungsgleichheit**

(4) Beweis nach Leonardo da Vinci



Prinzip der Ergänzungsgleichheit

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Prinzip

- Zwei Figuren heißen ergänzungsgleich, wenn sie sich so durch paarweise kongruente Figuren ergänzen lassen, dass die beiden entstehenden Figuren zerlegungsgleich sind.
- Zwei Figuren sind zerlegungsgleich, wenn sie sich in paarweise kongruente Teilfiguren zerlegen lassen

Übertragung & Anwendung

- Ergänze
  - Kathetenquadrate &
  - Hypotenusenquadrat
- Mit passenden, paarweise kongruenten Figuren, sodass eine Teilfigur entsteht, die zerlegungsgleich ist.

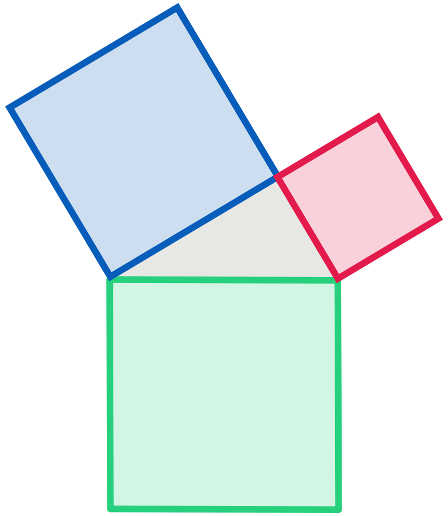
Folgerung aus diesem Prinzip

Direkte Folge aus obenstehender Aussage ist, dass zerlegungsgleiche Figuren auch ergänzungsgleich sind.

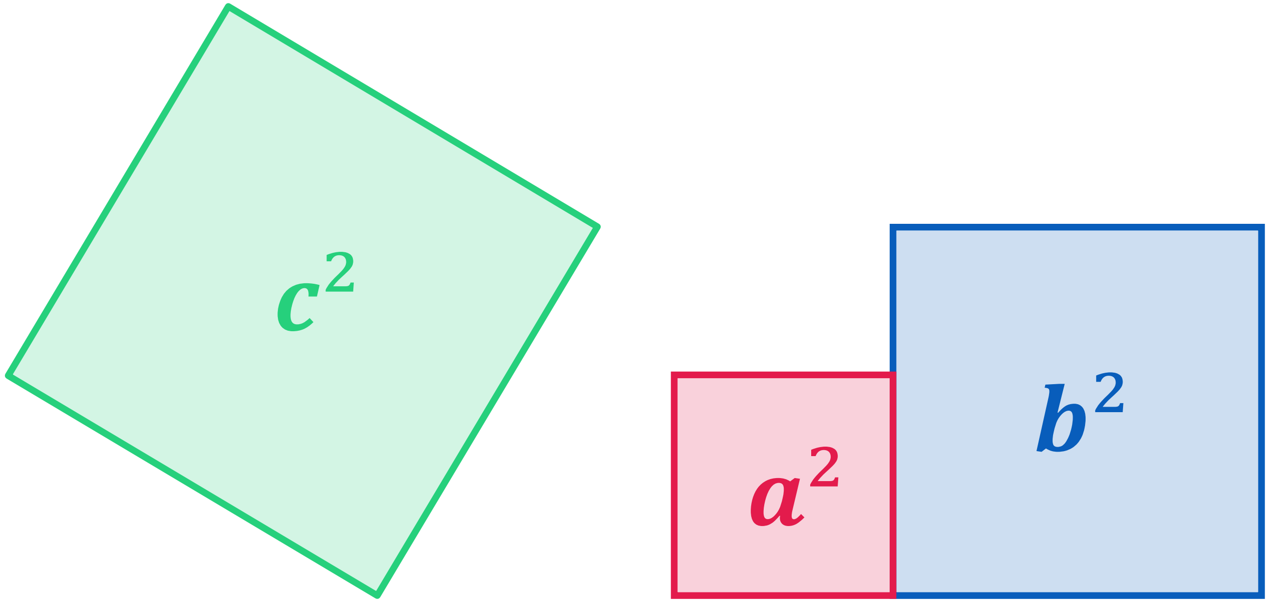
Ausgangsüberlegung

- Quadrat mit der Seitenlänge $(a + b)$
- Ergänzung der Kathetenquadrate

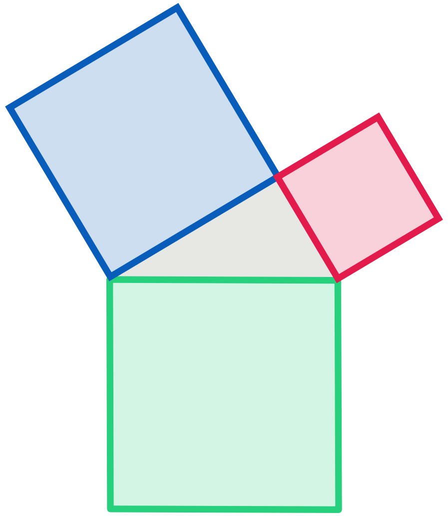
Prinzip der Ergänzungsgleichheit



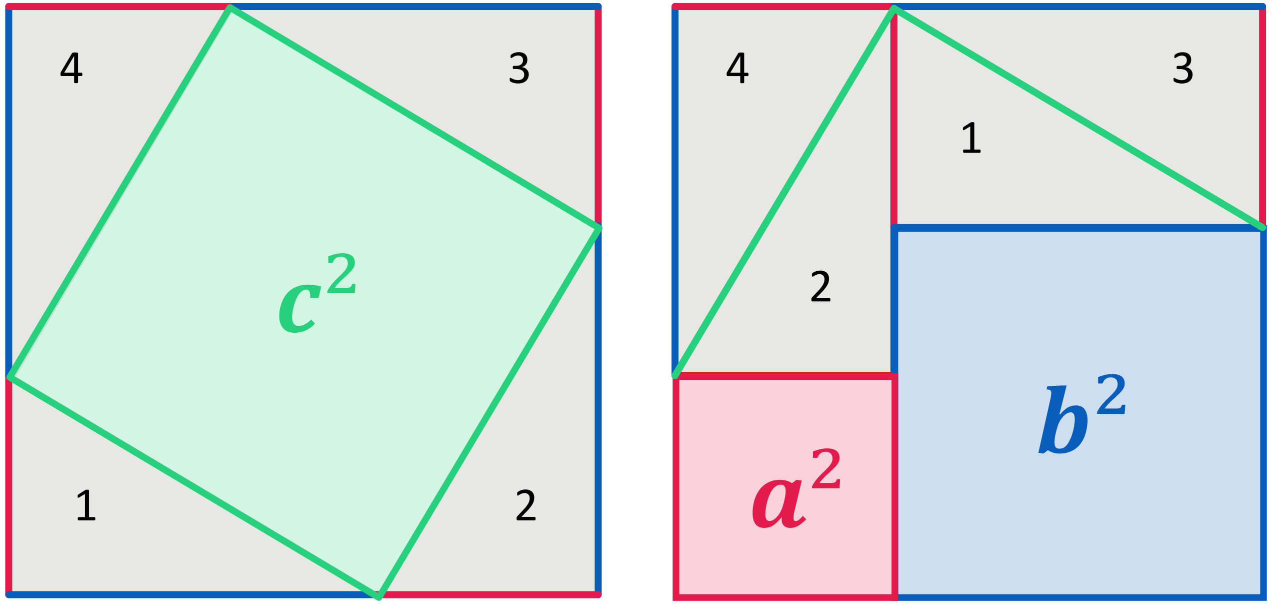
Altindischer Ergänzungsbeweis



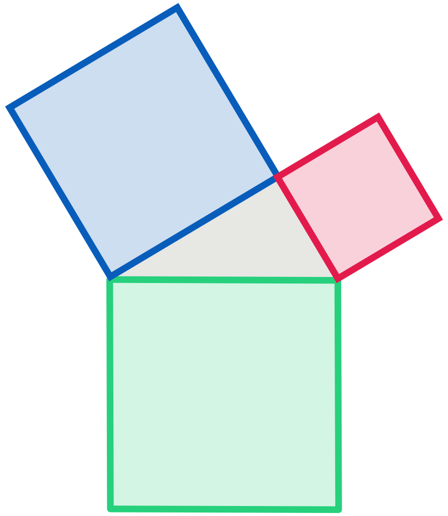
Prinzip der Ergänzungsgleichheit



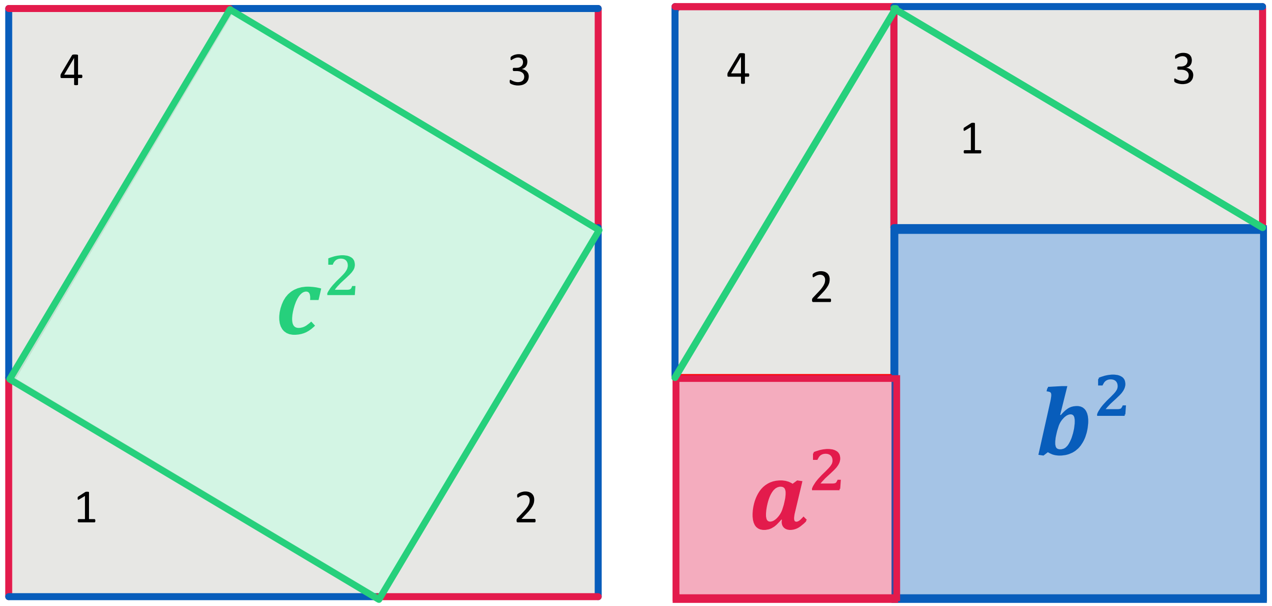
Altindischer Ergänzungsbeweis



Prinzip der Ergänzungsgleichheit



Altindischer Ergänzungsbeweis



Prinzip der Ergänzungsgleichheit

Altindischer Ergänzungsbeweis

Flächeninhaltsberechnung der Figuren

- **Figur 1**

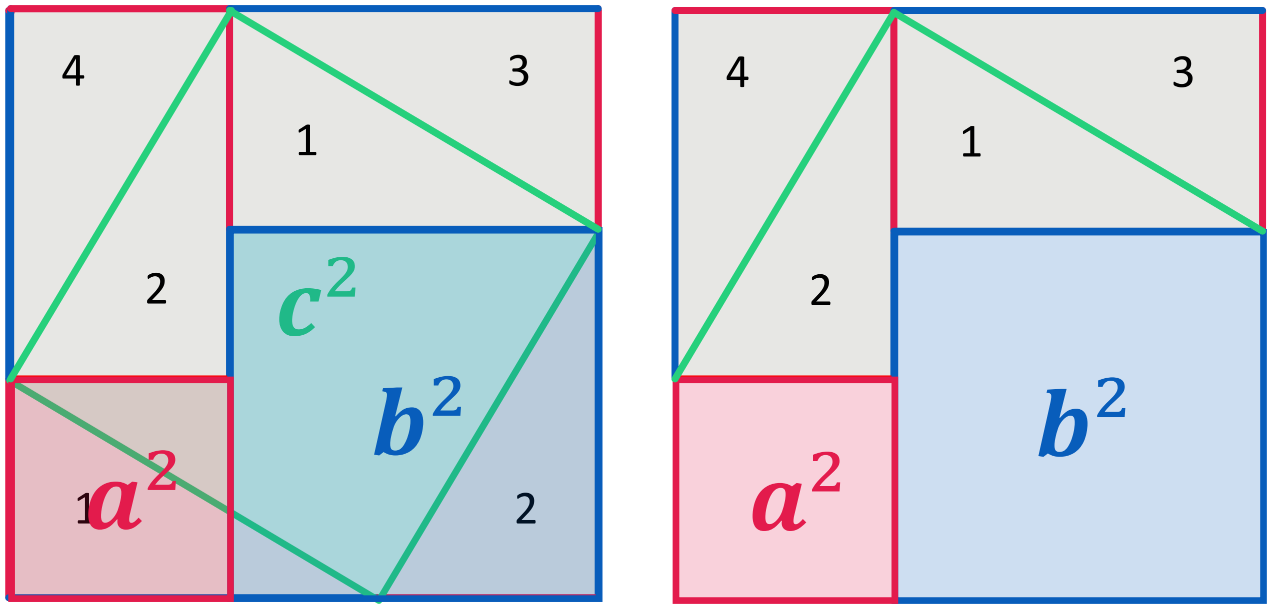
$$(a+b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot ab$$

- **Figur 2**

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot ab$$

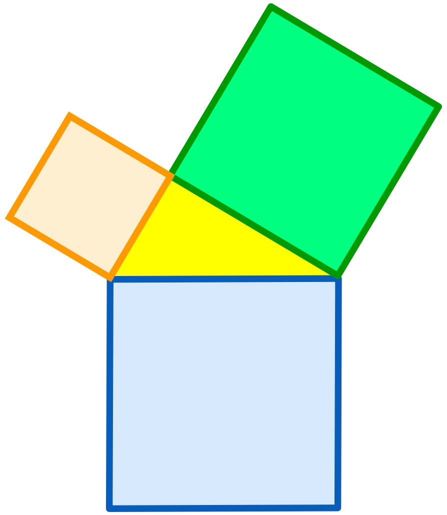
- **Gleichsetzen liefert unmittelbar**

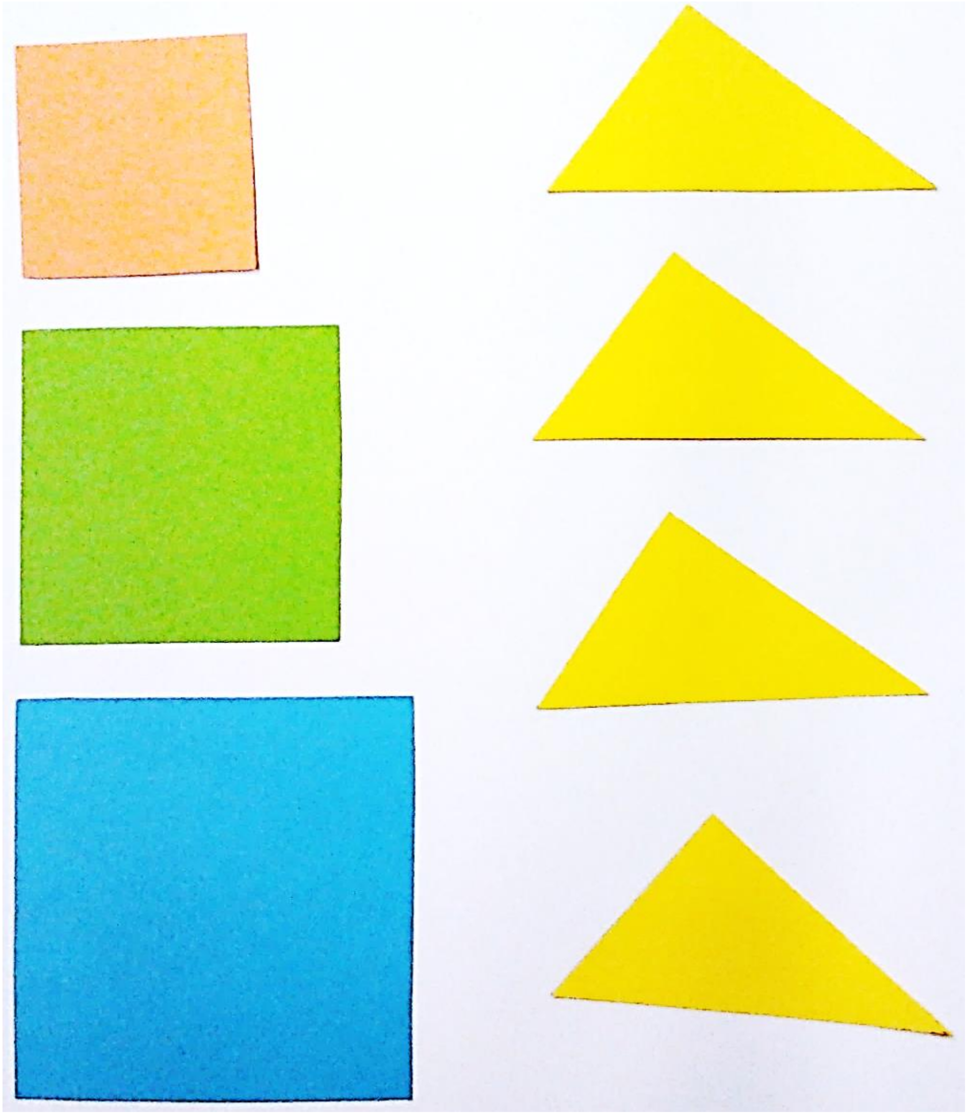
$$\boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2}$$



Figur 1 **Figur 2**

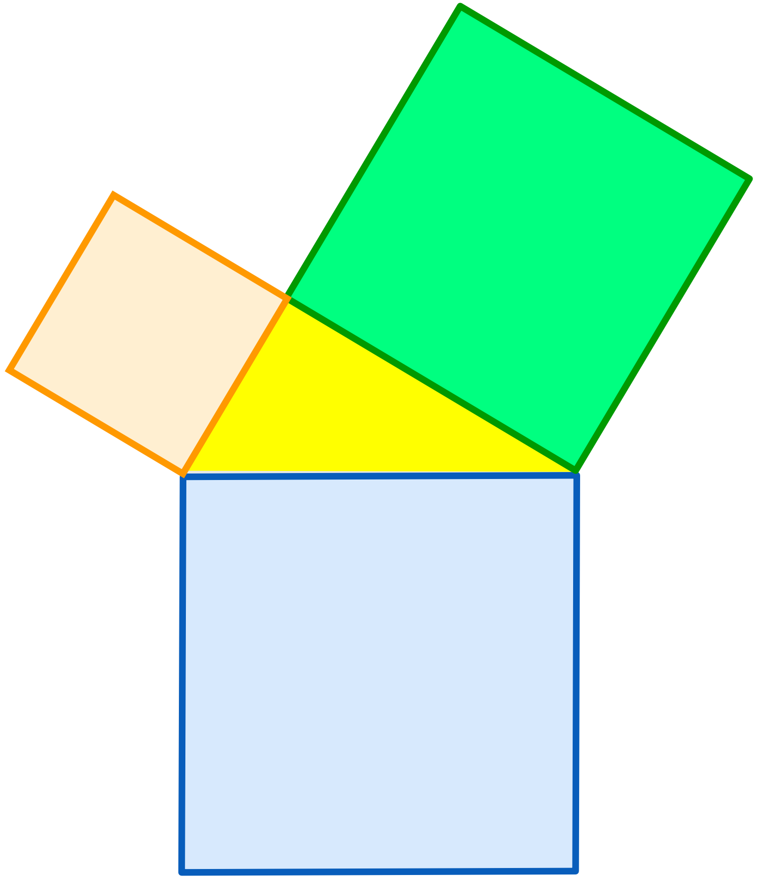
Prinzip der Ergänzungsgleichheit
Puzzle-Beweis

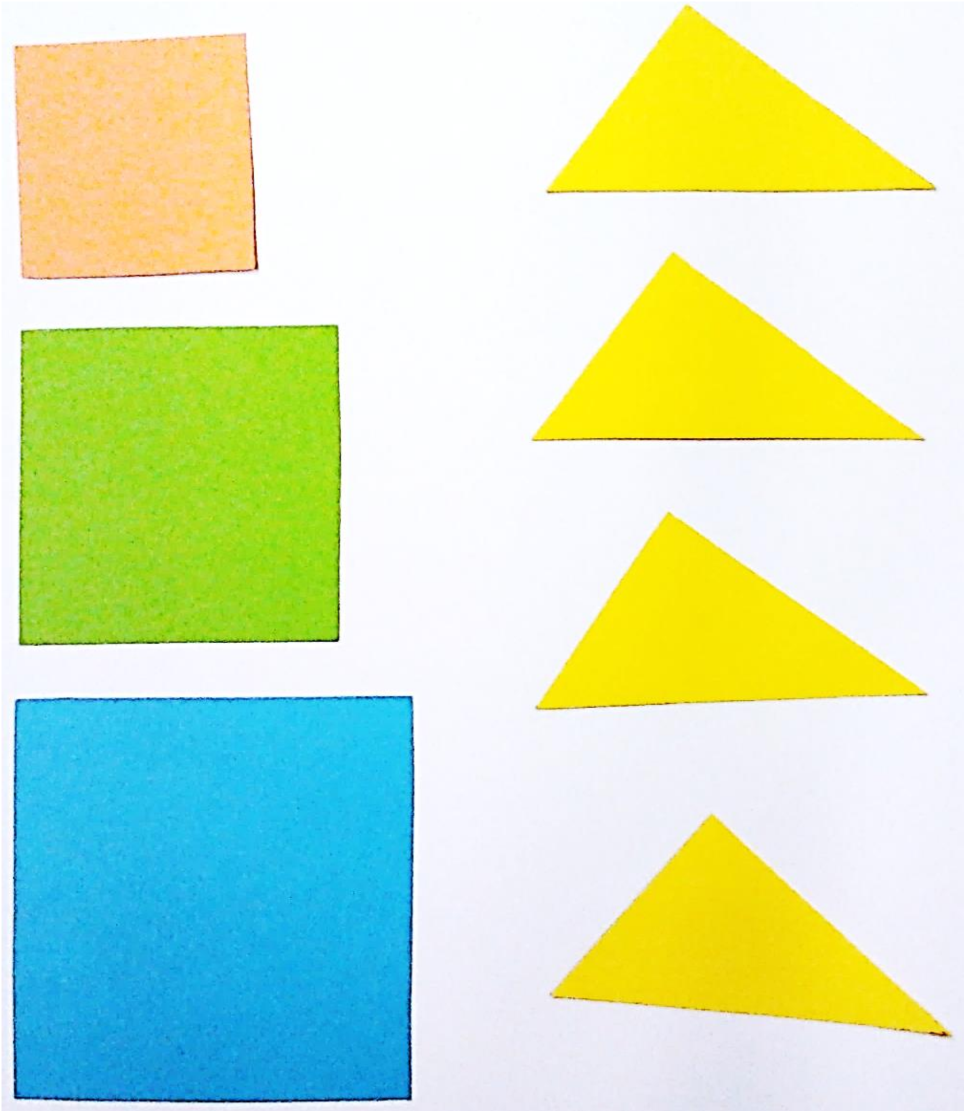




Prinzip der Ergänzungsgleichheit

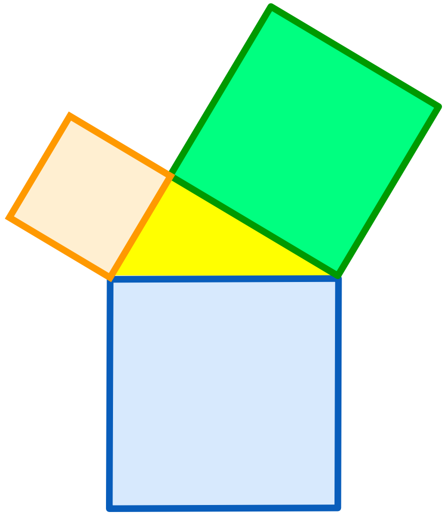
Puzzle-Beweis

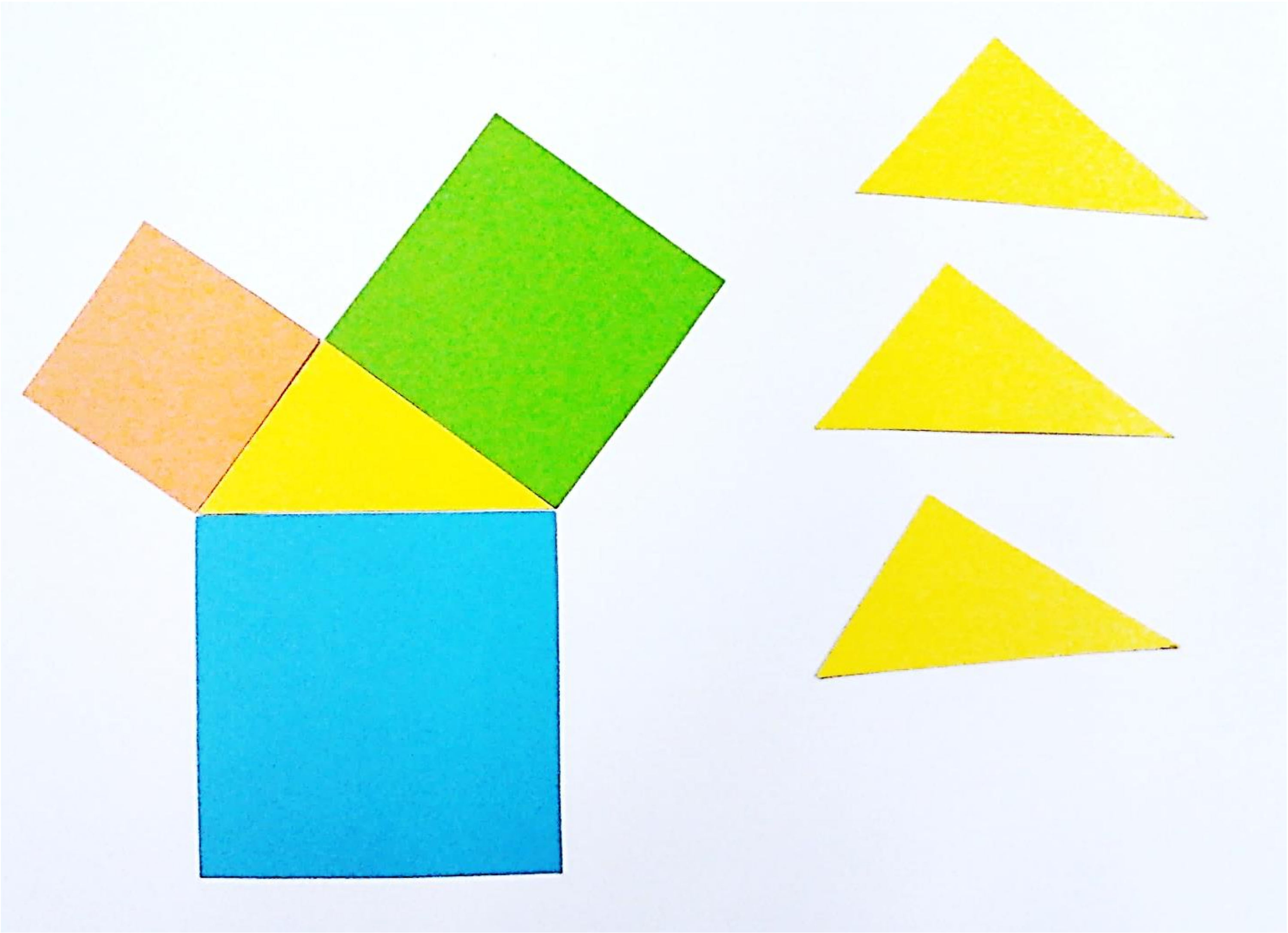




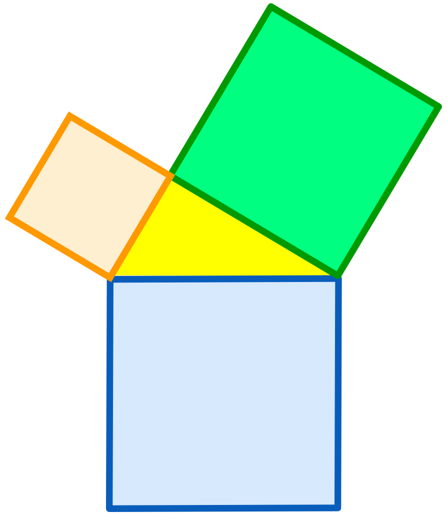
Prinzip der Ergänzungsgleichheit

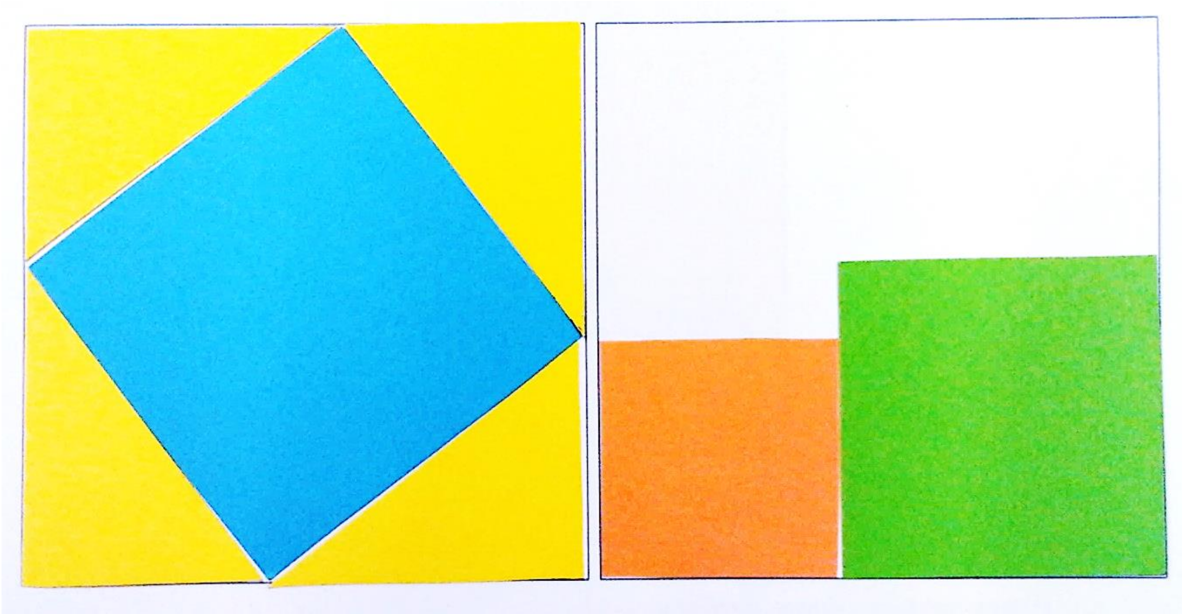
Puzzle-Beweis



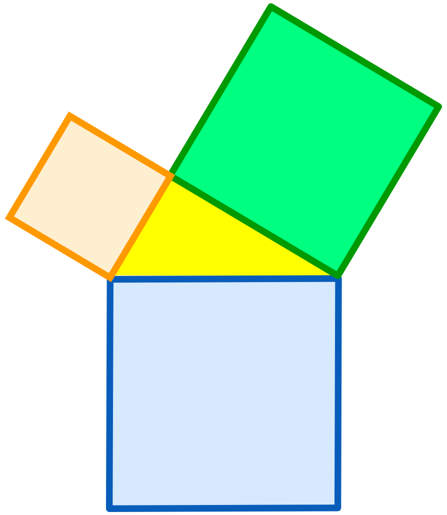


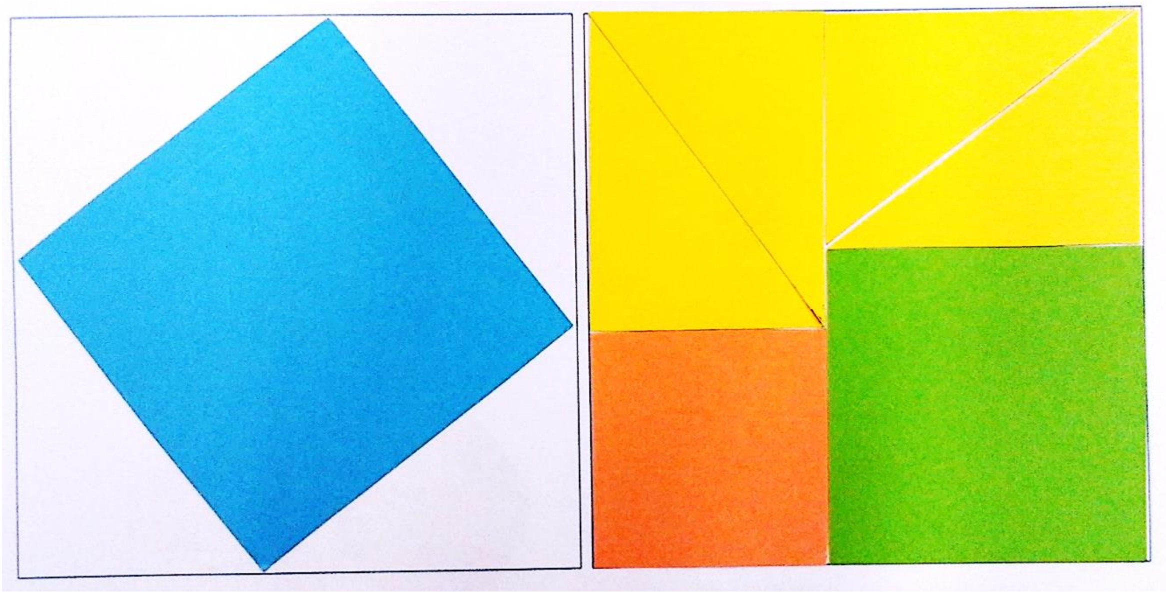
Prinzip der Ergänzungsgleichheit
Puzzle-Beweis





Prinzip der Ergänzungsgleichheit
Puzzle-Beweis





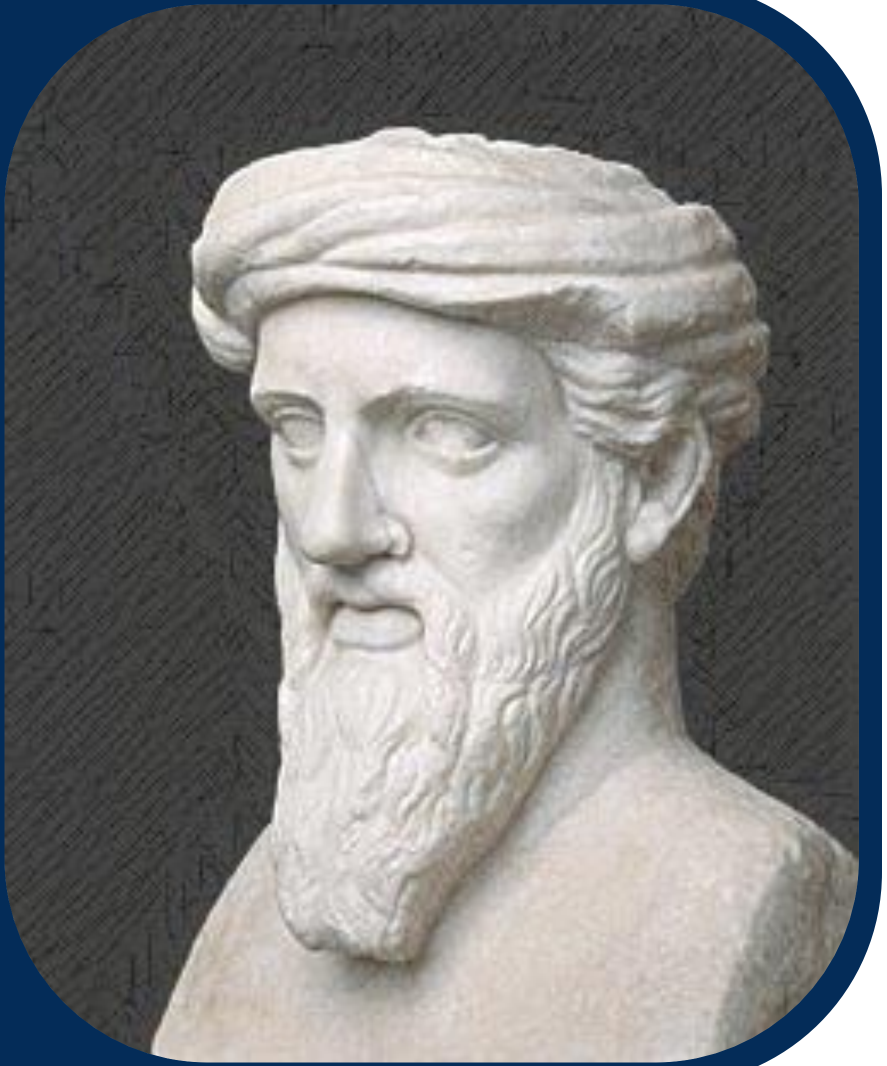
Satz des Pythagoras
Beweistypen bzw. Beweismethoden

(1) Abbildungsbeweis

(2) Prinzip der Zerlegungsgleichheit

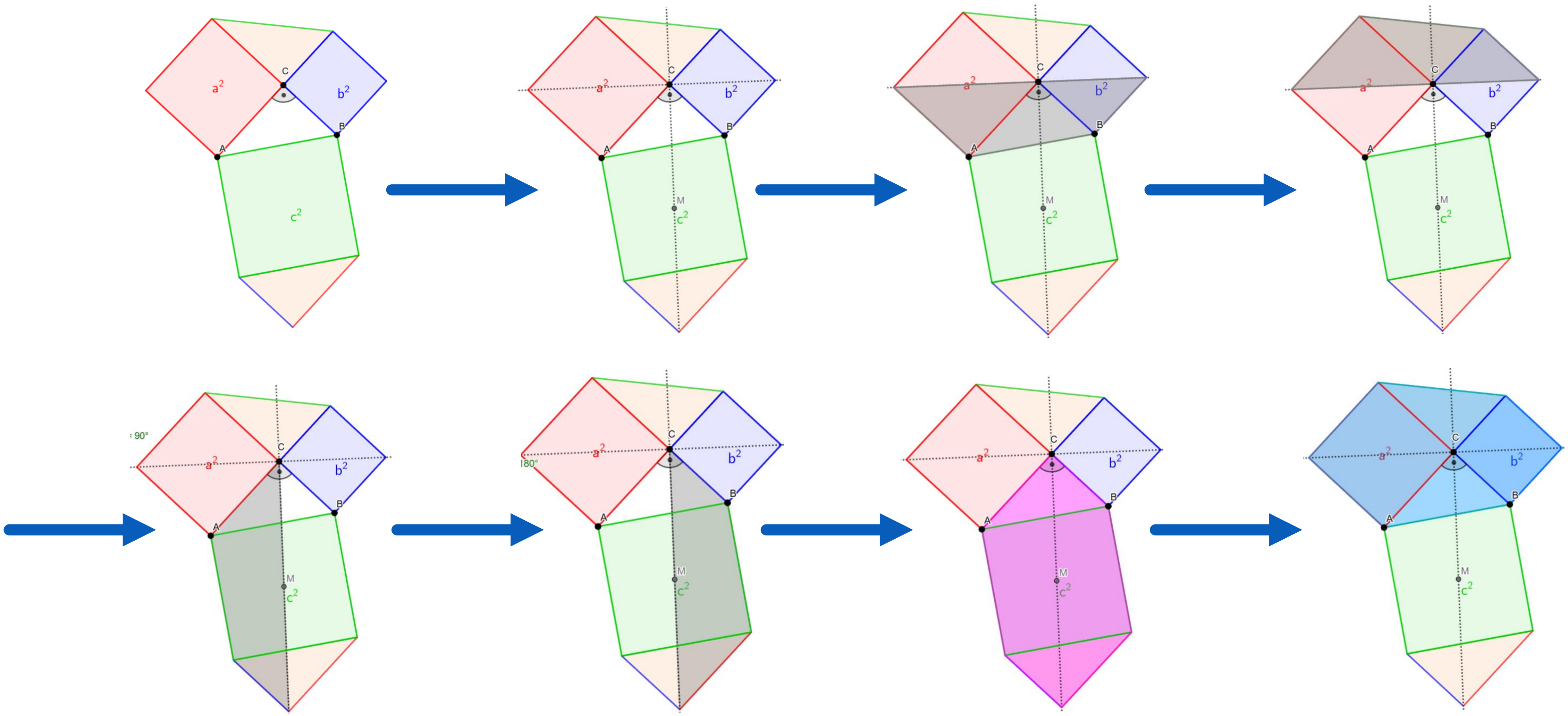
(3) Prinzip der Ergänzungsgleichheit

(4) Beweis nach Leonardo da Vinci



 https://www.geogebra.org/m/u4wxmtxx

Beweis nach Leonardo da Vinci

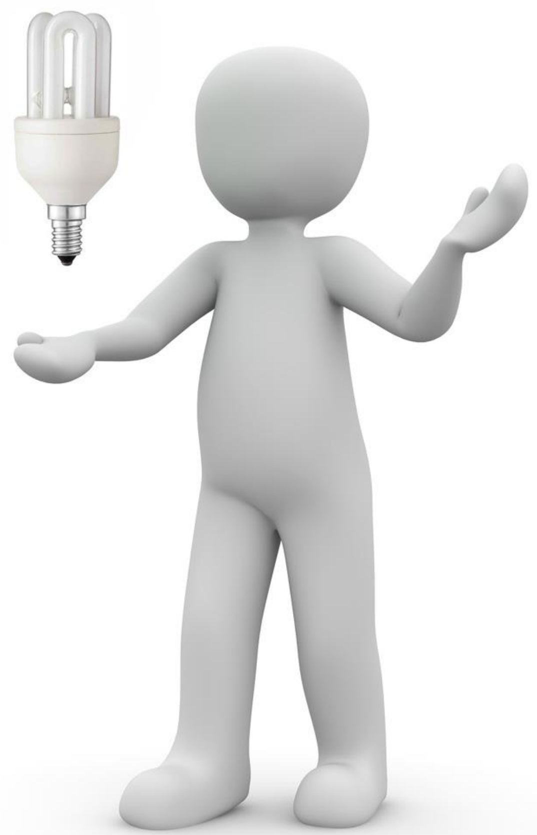


Kriterien zur Auswahl von Beweismethoden

Eigentätigkeit
Ein Großteil der Schüler muss in der Lage sein, den Beweis oder die entscheidende Beweisidee selbst zu entdecken bzw. einen wesentlichen Beitrag dazu zu leisten.

Vielfalt
Lernende sollen unterschiedliche Beweismethoden kennen lernen.

Anschauen und begreifen
Beweis lässt sich gut visualisieren und /oder enaktiv erarbeiten.



Verständnis fördern

- Der Beweis ist leicht durchschaubar.
- Der Beweis erleichtert eine wichtige Erkenntnis.

Beispiel

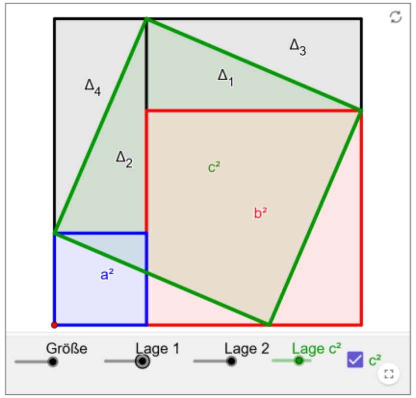
- Die Satzgruppe des Pythagoras bezieht sich auf Flächeninhalte.
- Dies sollte beim Beweis direkt erkennbar sein.

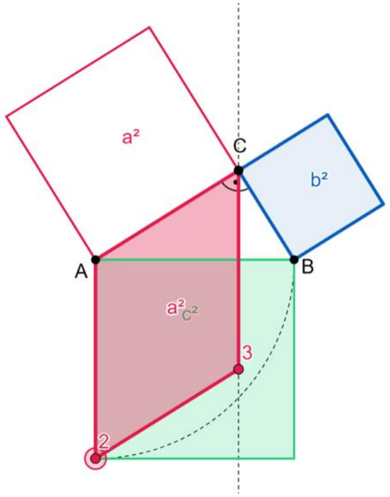
Arbeitsauftrag 3: Arbeitsaufträge zur Erarbeitung

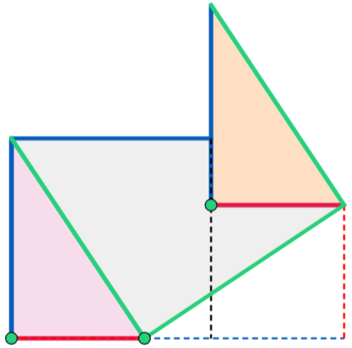
- Entwickeln Sie passende Arbeitsaufträge für Ihre Schüler:innen zur Erarbeitung der verschiedenen Beweistypen mithilfe der GeoGebra-Applets im Unterricht.

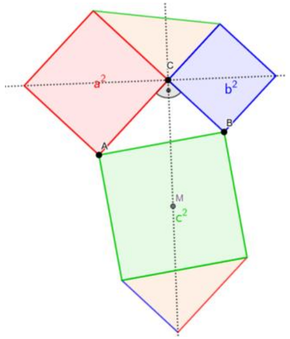
*Alternativ: Bearbeiten Sie selbst die bereits vorgeschlagenen Arbeitsaufträge in **Kapitel 3: Arbeitsblätter** des GeoGebra-Buchs und passen Sie diese gegebenenfalls an.*

GeoGebra-Buch
https://www.geogebra.org/m/u4wxmtxx









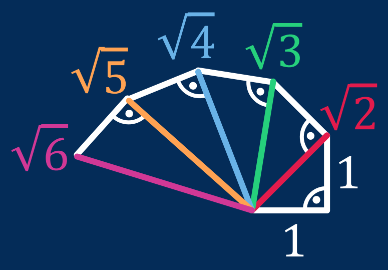
25 Minuten

4 Optionale Vertiefung: Anwendungen des Satzes des Pythagoras

Satzgruppe des Pythagoras: Anwendungen

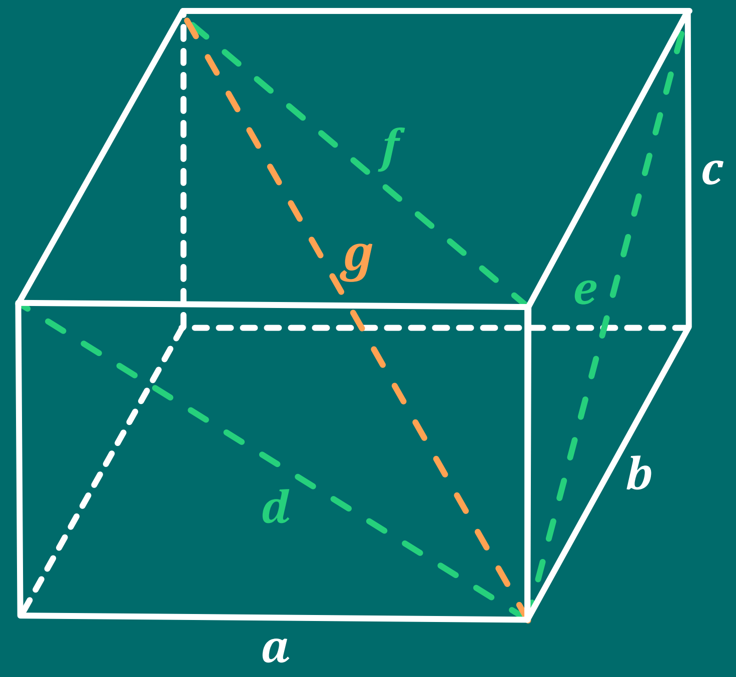
Ebene Geometrie

- **Berechnungen**
  - Diagonale des Rechtecks
  - Höhe und Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks
  - Abstand zweier Punkte (im Koordinatensystem)
  - Kreistangenten und Sehnen
  - Reguläre n-Ecke
  - Kosinussatz
- **Konstruktionen**
  - Flächenverwandlung
  - Strecken der Länge $\sqrt{n}$



Raumgeometrie

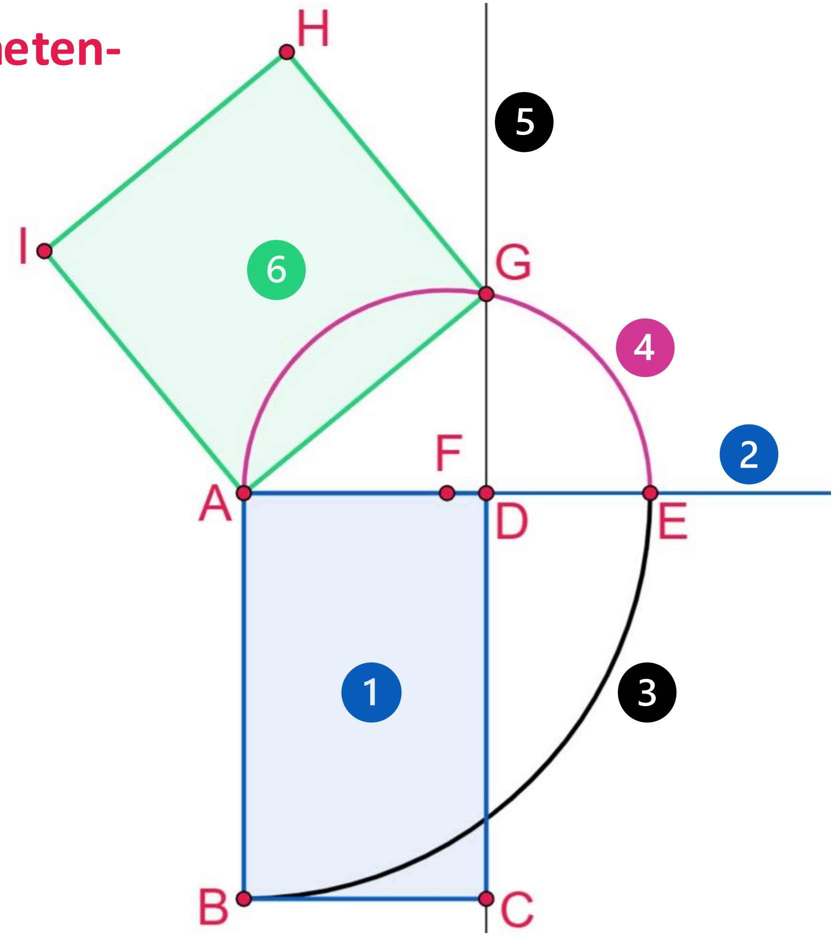
- **Berechnungen**
  - Raumdiagonalen
  - Längen im Raum



Satzgruppe des Pythagoras: Anwendungen

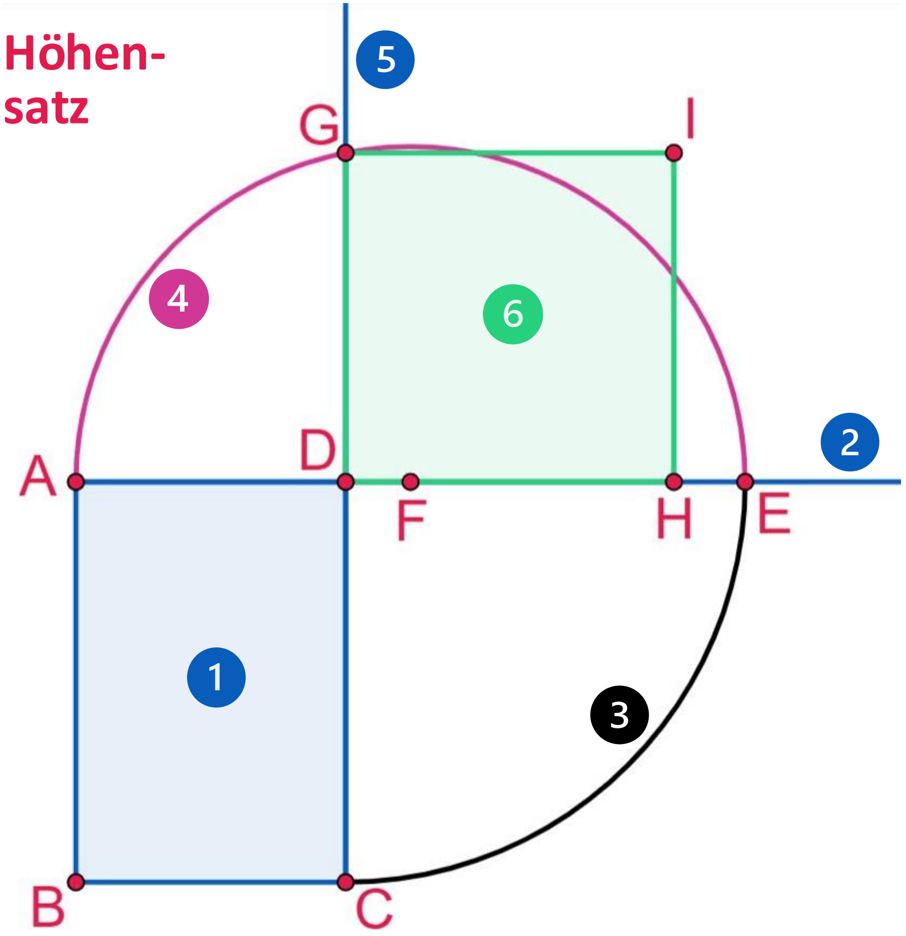
Konstruktionsaufgabe: Zu einem gegebenen Rechteck soll ein Quadrat konstruiert werden, das denselben Flächeninhalt wie das Rechteck hat.

Katheten-satz



https://www.geogebra.org/m/ZuH6749V

Höhen-satz

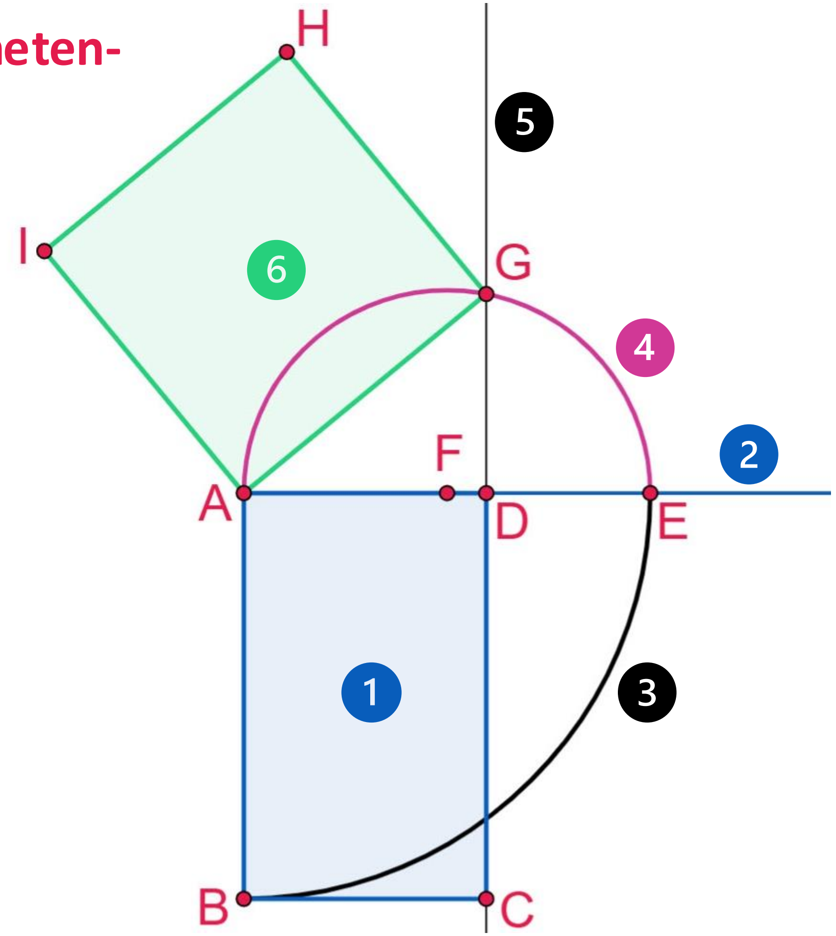


https://www.geogebra.org/m/khTUH8CQ

Satzgruppe des Pythagoras: Anwendungen

Konstruktionsaufgabe: Zu einem gegebenen Rechteck soll ein Quadrat konstruiert werden, das denselben Flächeninhalt wie das Rechteck hat.

Kathetensatz



https://www.geogebra.org/m/ZuH6749V

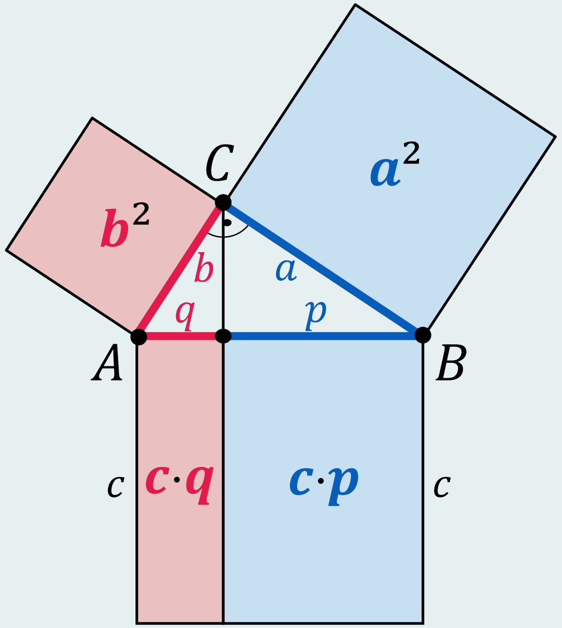
Ausgangspunkt:
Figur zum Kathetensatz

Kann man ein Quadrat der Figur konstruieren, wenn man ein Rechteck hat?

→ Konstruktion der entsprechenden Kathete.

Welche Schritte sind notwendig?

…



https://www.geogebra.org/m/khTUH8CQ

5 Abschluss

Take Home Messages

Take Home Messages

Auswahl von Beweistypen wohlüberlegt

Vielfalt unterschiedlicher Beweistypen kennenlernen

Verständnisförderung durch GeoGebra-Simulationen

Beweisfindung – nicht Beweisdarstellung – steht im Vordergrund

Beitrag zu Prozesszielen des Problemlösens

Arbeitsaufträge müssen passend zum Applet gestellt sein

Applets können ergänzen & insbesondere bei der Systematisierung und Verallgemeinerung helfen

Rückmeldung

https://survey.rptu.de/index.php/996648

Offene Fragen?

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit

Henrik Ossadnik

RPTU
Rheinland-Pfälzische Technische Universität
Kaiserslautern-Landau
Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)
Fortstraße 7, 76829 Landau

h.ossadnik@rptu.de

https://henrik-ossadnik.de

RPTU

Icons und Bildquellen

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Icons von Flaticon https://www.flaticon.com/de/

	https://www.flaticon.com/de/kostenlose-icons/buch von Freepik
	https://www.flaticon.com/de/kostenlose-icons/timer von Freepik
	https://www.flaticon.com/de/kostenlose-icons/quelle von Freepik
	https://www.flaticon.com/free-icons/communication von Freepik
	https://www.flaticon.com/free-icons/hard-work von Freepik

GeoGebra-Logo by GeoGebra GmbH