Lehr-Lern-Labor-Seminar

Modul 12a/b Fachdidaktische Bereiche
Mathematische Inhalte der Stationen

Henrik Ossadnik & Jan Lucas Fischer

30.03.2026 https://henrik-ossadnik.de/lehrveranstaltungen/lll-seminar-ss-2026/

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

RPTU Rheinland-Pfälzische Technische Universität
Kaiserslautern
Landau

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Lehr-Lern-Labor-Seminar
Stationsinhalte

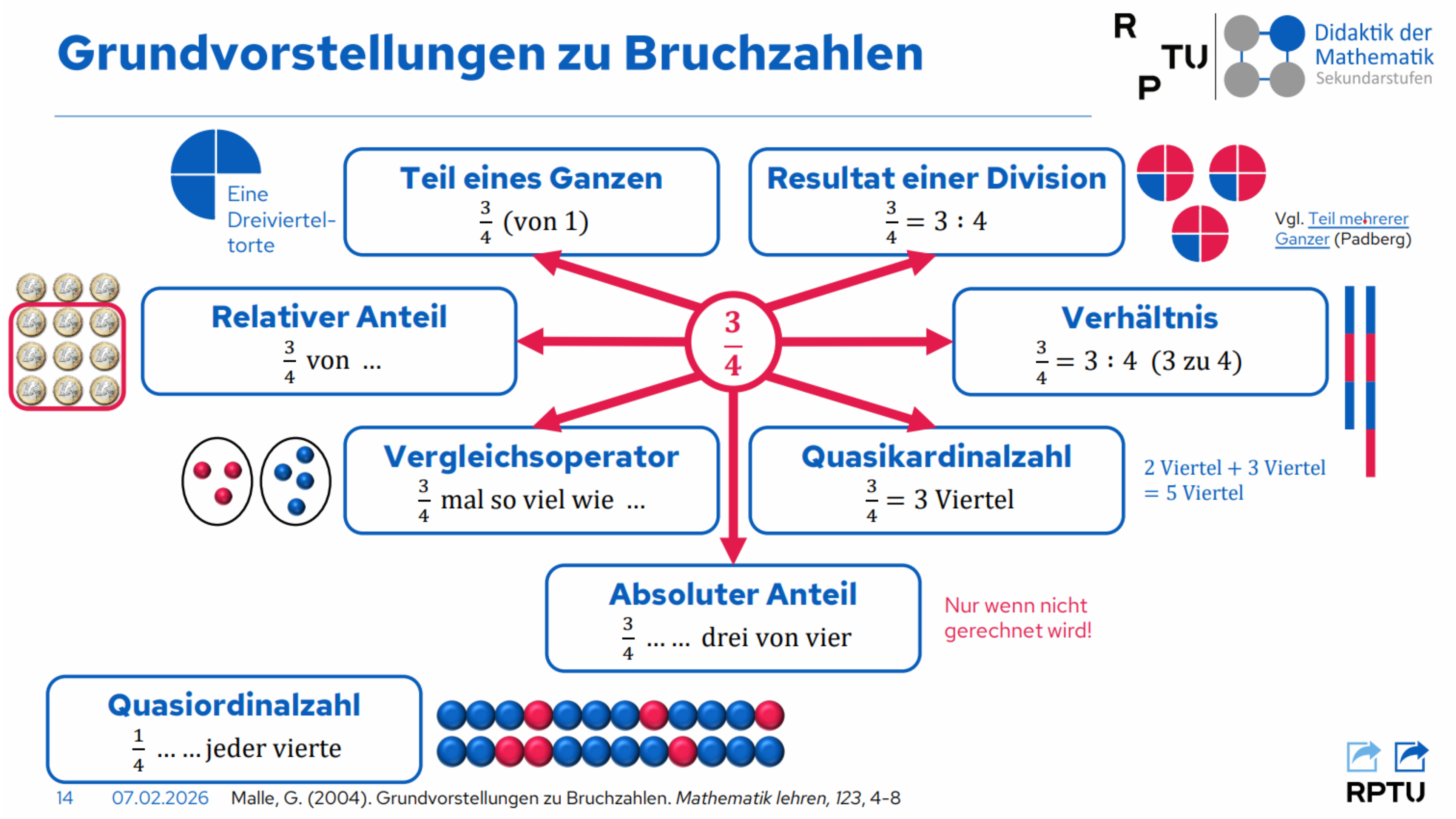
1. WABIS – Grundvorstellungen zu Brüchen
2. MaTeGnu Modul 1 - Differentialrechnung
3. MaTeGnu Modul 2 - Integralrechnung

Didaktik der Mathematik
Sekundarstufen

1

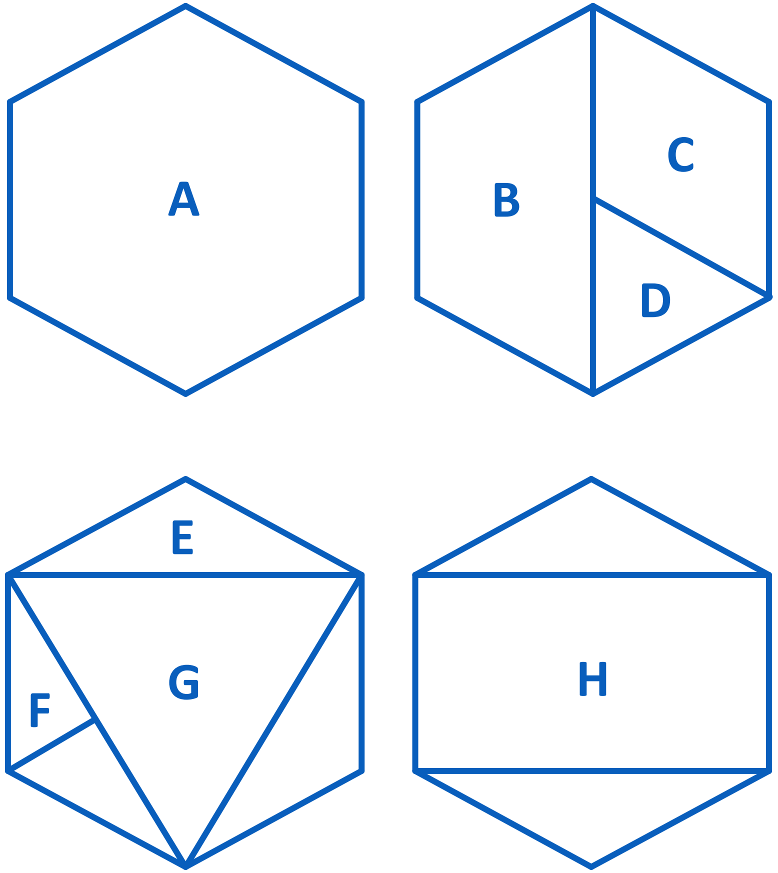
WABIS
Grundvorstellungen zu Brüchen

Wiederholung:
Didaktik der Zahlbereichserweiterung



WABIs?!

https://juergen-roth.de/veroeffentlichungen/geometrische_lernumgebung_bruchzahlen/roth_geometrische_lernumgebung_bruchzahlen.pdf



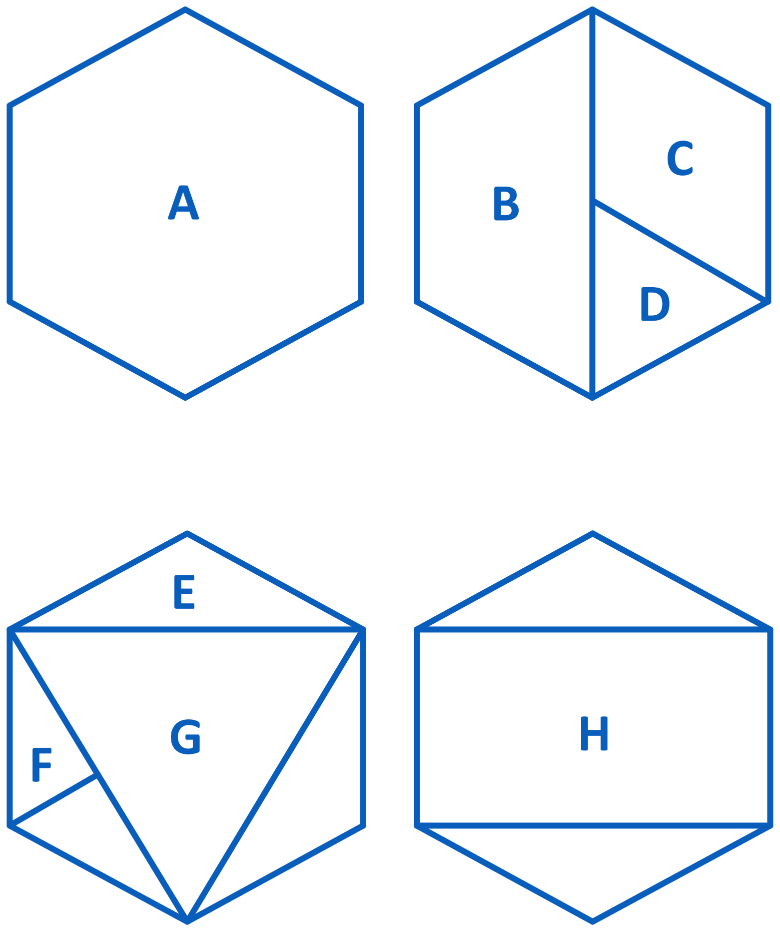
- **WABIs**
  - (Regelmäßiges) Sechseck A,
  - (gleichschenkliges) Trapez B,
  - Raute C,
  - mittleres (gleichseitiges) Dreieck D,
  - langes (stumpfwinklig-gleichschenkliges) Dreieck E,
  - kleines (rechtwinkliges) Dreieck F,
  - großes (gleichseitiges) Dreieck G,
  - Rechteck H
- **Literatur**

Roth, J. (2009). Eine geometrische Lernumgebung – Entwicklung von Verständnisgrundlagen für Bruchzahlen und das Rechnen mit Brüchen. In: Fritz-Stratmann, A.; Schmidt, S. (Hrsg.) (2009). Fördernder Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I – Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden, Weinheim: Beltz Verlag, S. 186-200

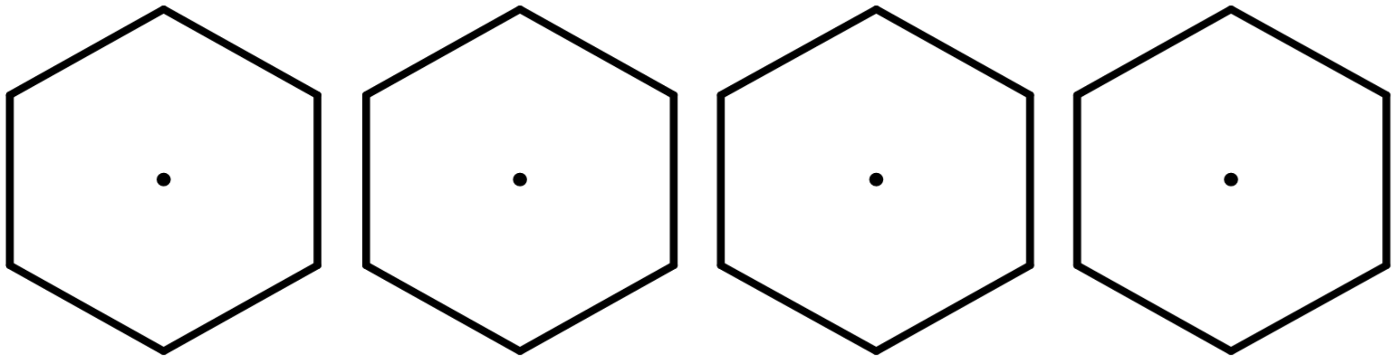
Roth, J. (2009). Grundverständnis für Bruchzahlen aufbauen mit „WABIs“ – Ein Anschauungsmittel auf der Basis eines regelmäßigen Sechsecks

https://de.mathigon.org/polypad/8Tj3qaQPTjkhzQ

Teil eines Ganzen

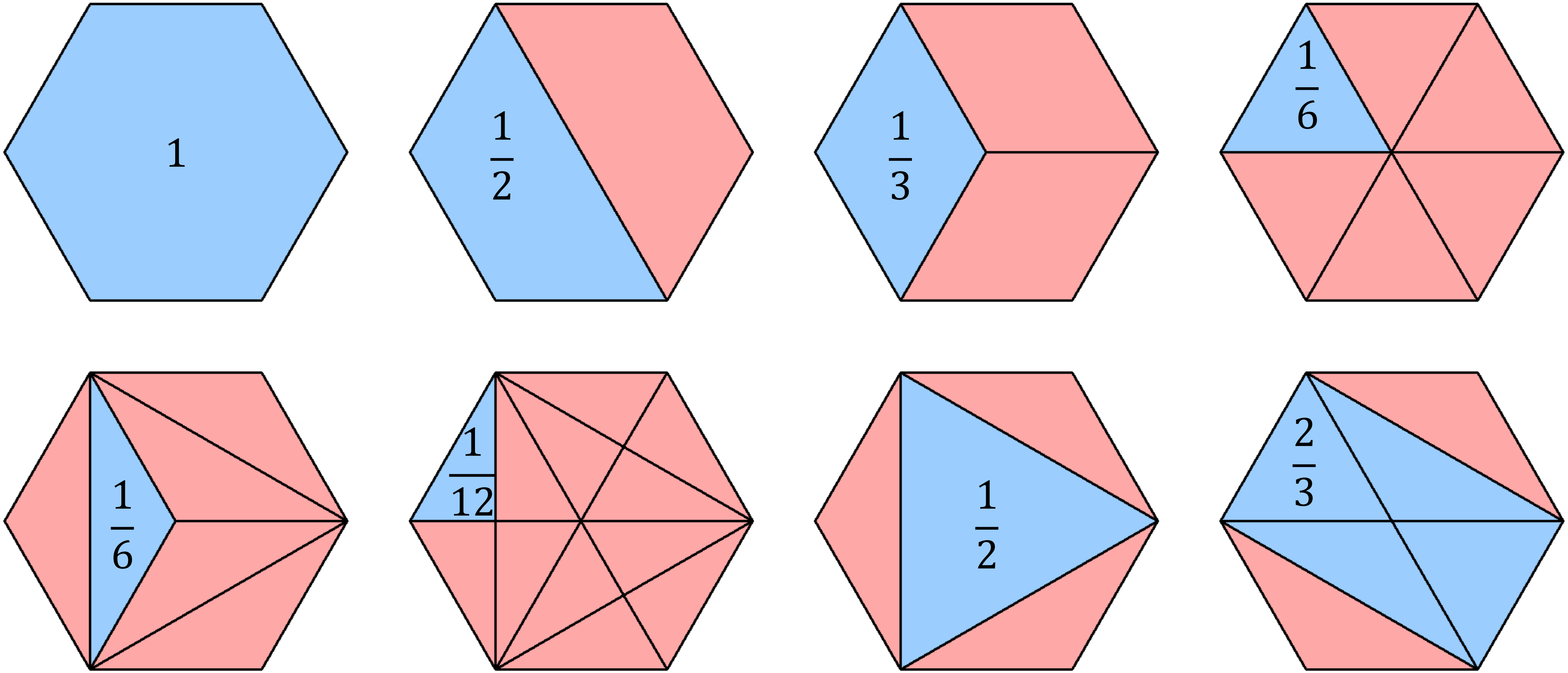


WABI-Typ	A	B	C	D	E	F	G	H
Anzahl der Teile								
Bruchteil von A								



https://de.mathigon.org/polypad/8Tj3qaQPTjkhzQ

Teil eines Ganzen



https://de.mathigon.org/polypad/r1XOVH2LBaKxqw

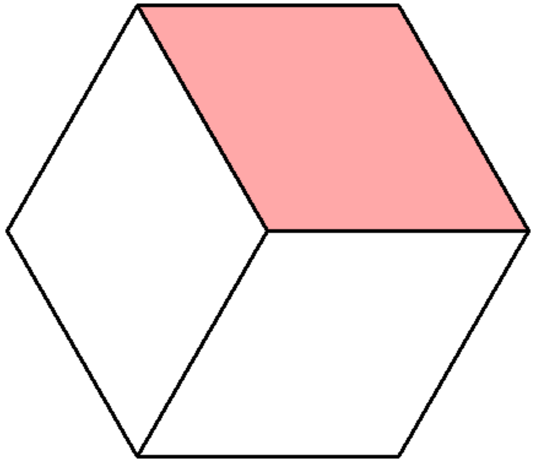
Erweitern und Kürzen

https://de.mathigon.org/polypad/8Tj3qaQPTjkhzQ

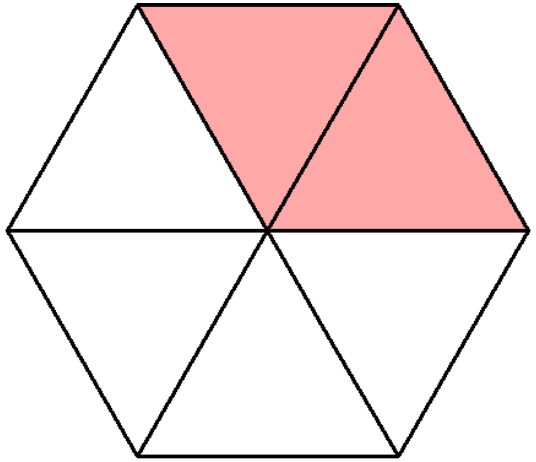
- **Erweitern**
  - Bruchstück *und* das Ganze *feiner unterteilen* (**Verfeinern**)

- **Kürzen**
  - Bruchstück *und* das Ganze *gröber unterteilen* (**Vergröbern**)

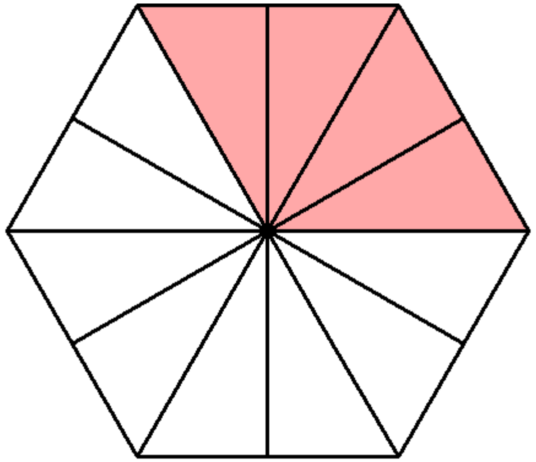
Erweitern →



$$\frac{1}{3}$$



$$\frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6}$$

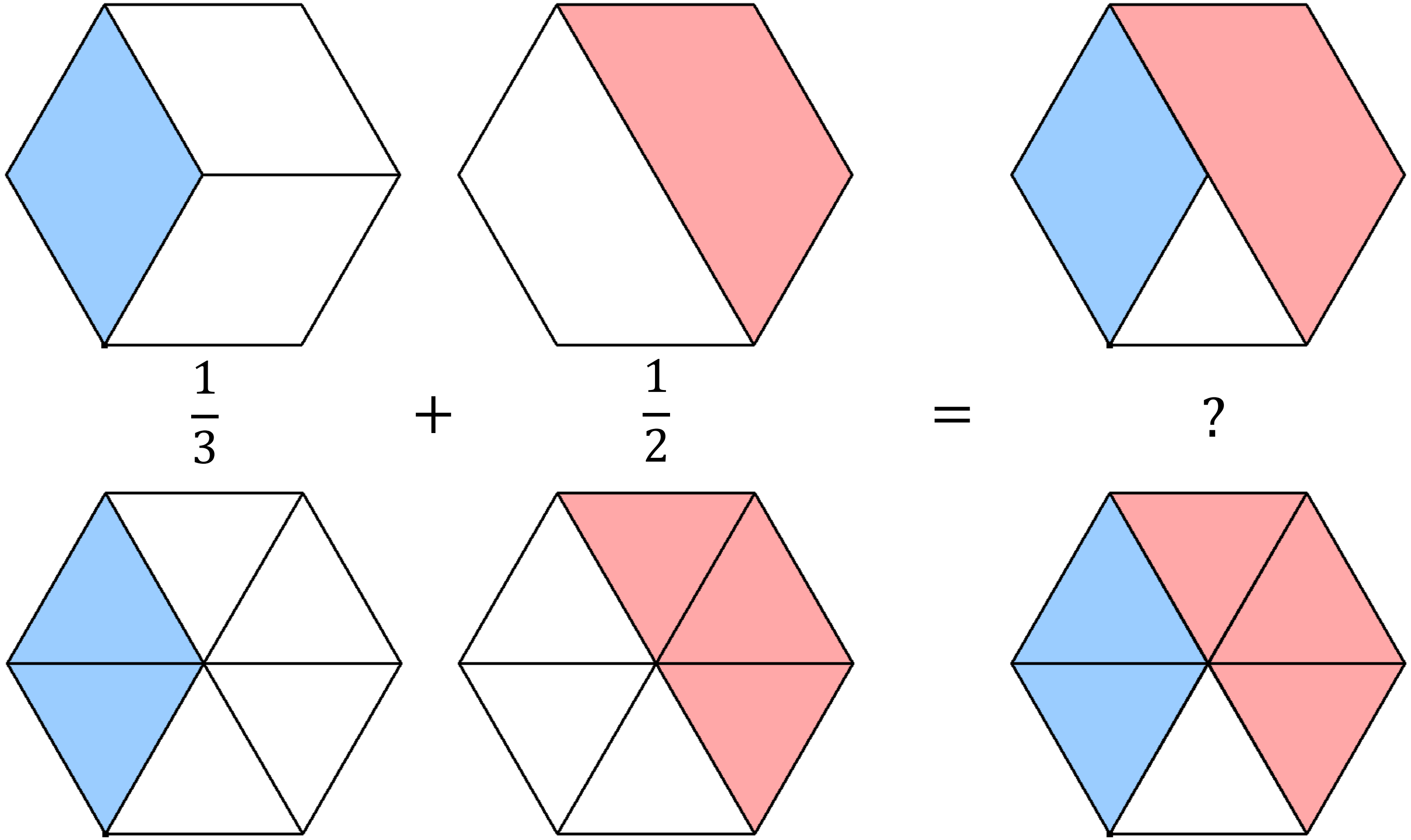


$$\frac{2 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{4}{12}$$

← **Kürzen**

Addieren von Brüchen: Dazulegen

https://de.mathigon.org/polypad/8Tj3qaQPTjkhzQ



$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = ?$$

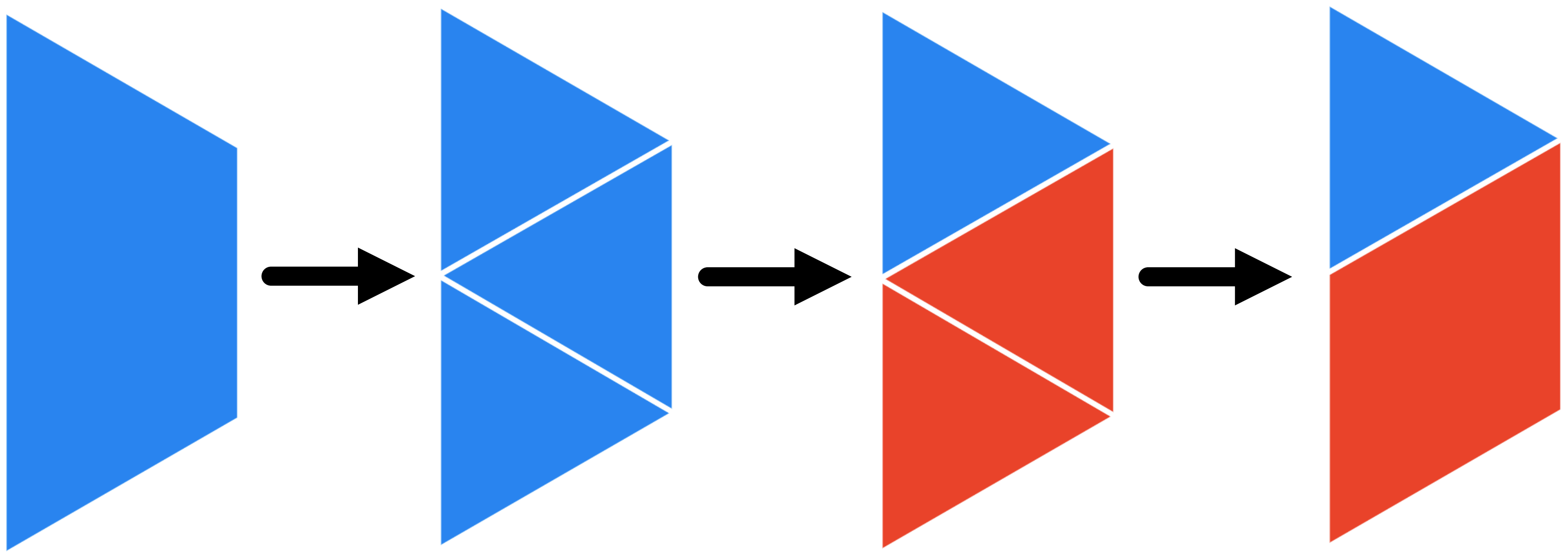
$$\frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$$

Multiplizieren von Brüchen: Von-Deutung

In einem Produkt wie $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$ wird der erste Faktor als Operator (zwei Drittel von …) und der zweite Faktor als WABI interpretiert.

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \text{ von } \frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

- Zeichnen Sie den zweiten Faktor als WABI und nehmen Sie die Operation durch Einzeichnen von Trennlinien vor.
- Schraffieren Sie das Ergebnis und geben Sie dessen Wert an.

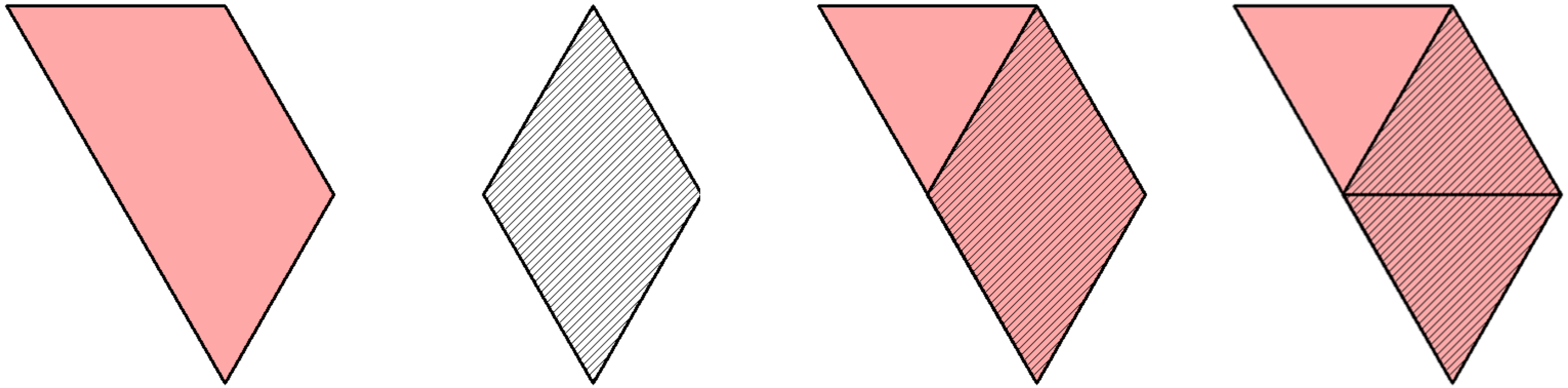


https://de.mathigon.org/polypad/8Tj3qaQPTjkhzQ

Dividieren von Brüchen: Messen

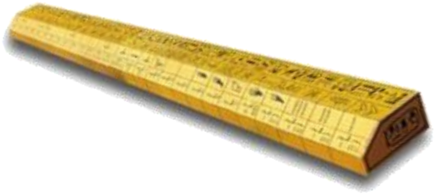
$\boxed{\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = ?}$

Maß kleiner als die zu messende Größe. ⇒ „Wie oft passt $\frac{1}{3}$ in $\frac{1}{2}$?“



$$\frac{1}{2} \quad : \quad \frac{1}{3} \quad = \quad 1\frac{1}{2} \quad = \quad \frac{3}{2}$$

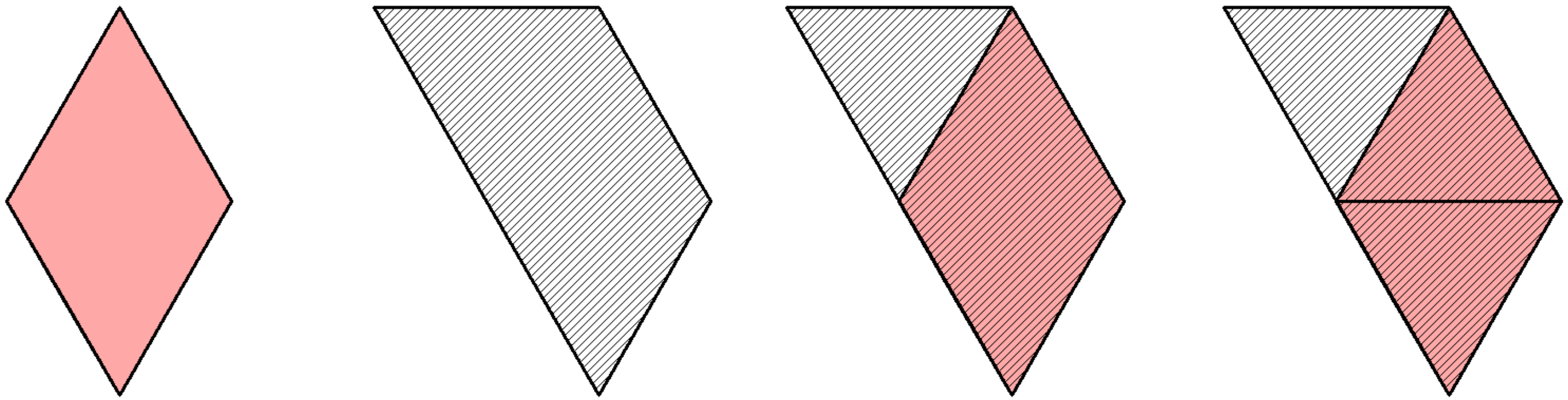
https://de.mathigon.org/polypad/8Tj3qaQPTjkhzQ



Dividieren von Brüchen: Messen

$\boxed{\frac{1}{3} : \frac{1}{2} = ?}$

Maß größer als die zu messende Größe. ⇒ „Welcher Bruchteil von $\frac{1}{2}$ passt in $\frac{1}{3}$?“

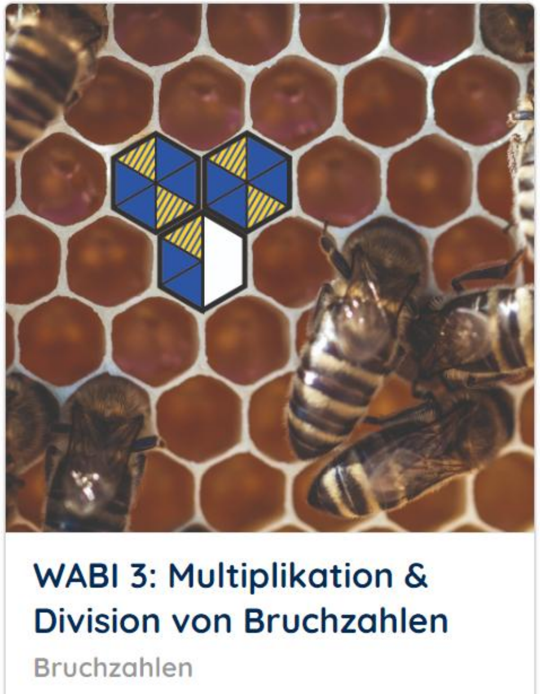


$$\frac{1}{3} \quad : \quad \frac{1}{2} \quad = \quad \mathbf{?} \quad = \quad \frac{2}{3}$$

https://de.mathigon.org/polypad/8Tj3qaQPTjkhzQ

Laborstation: WABIs

- [WABI 1: Grundvorstellungen zu Brüchen]
  - Veröffentlichte Version in der [Mathe-Welt]
- [WABI 2: Brüche addieren und subtrahieren]
- [WABI 3: Multiplikation & Division von Bruchzahlen]



2

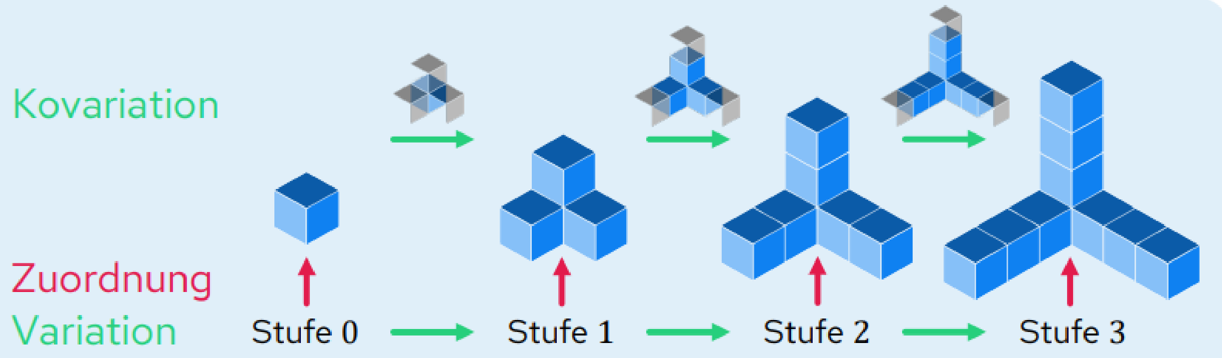
MaTeGnu Modul 1 Differentialrechnung

Wiederholung:
Didaktik der Algebra

RPTU Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Grundvorstellungen zu Funktionen an Repräsentationen ausbilden

RPTU Didaktik der Mathematik Sekundarstufen



$f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0,$
$n \mapsto \underbrace{3n+1}$

Zuordnung

Variation

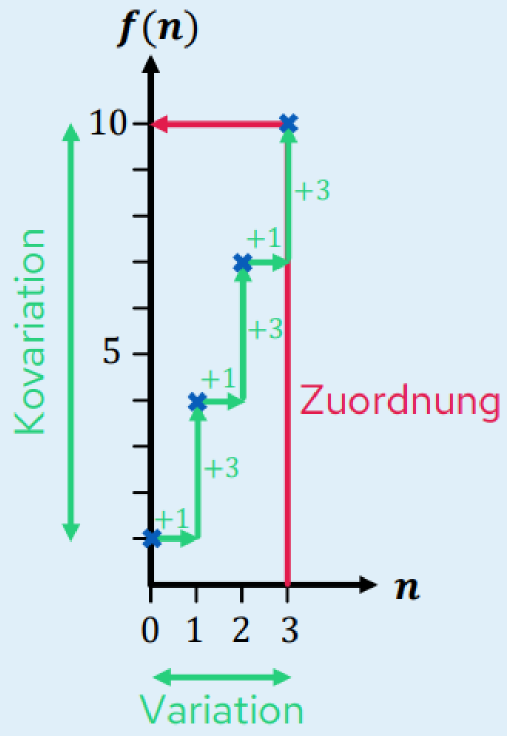
n	$f(n)$
0 →	1
1 →	4
2 →	7
3 →	10

+1 +1 +1

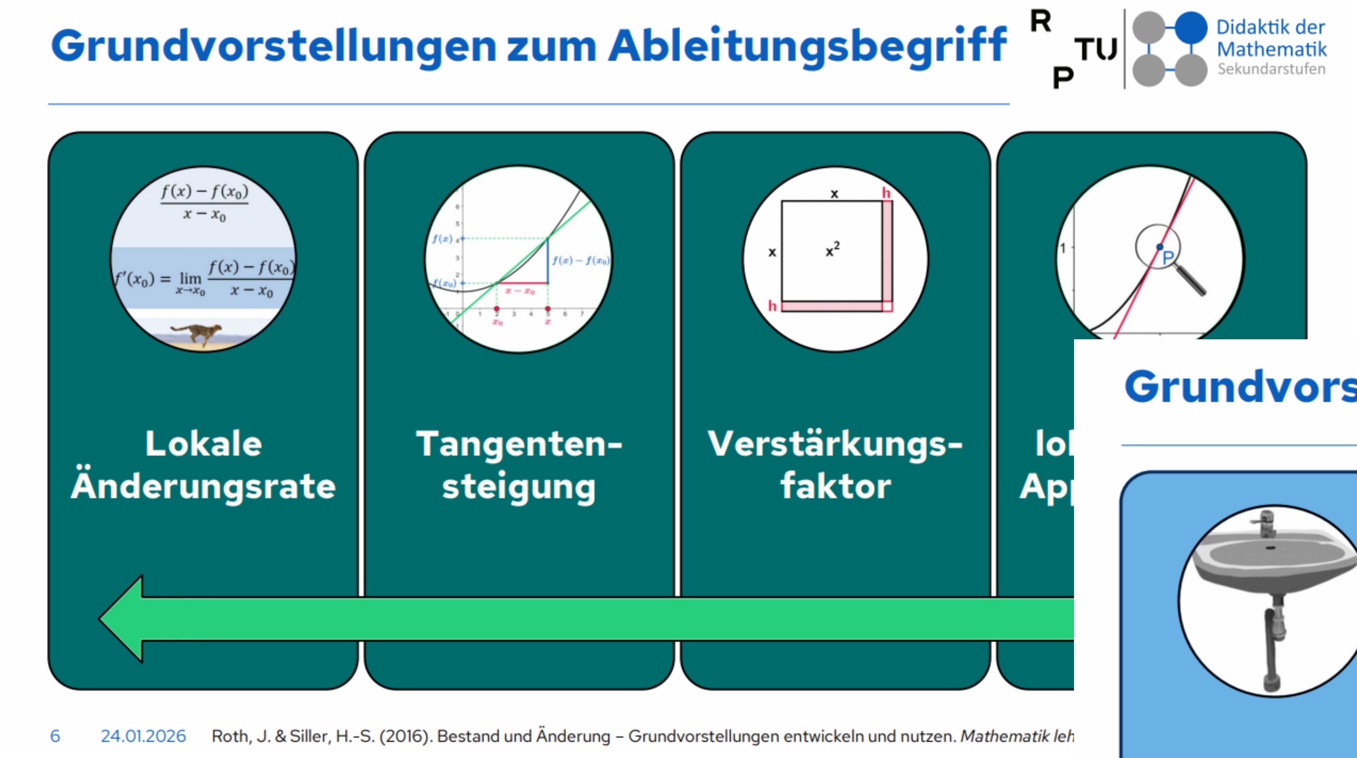
+3 +3 +3

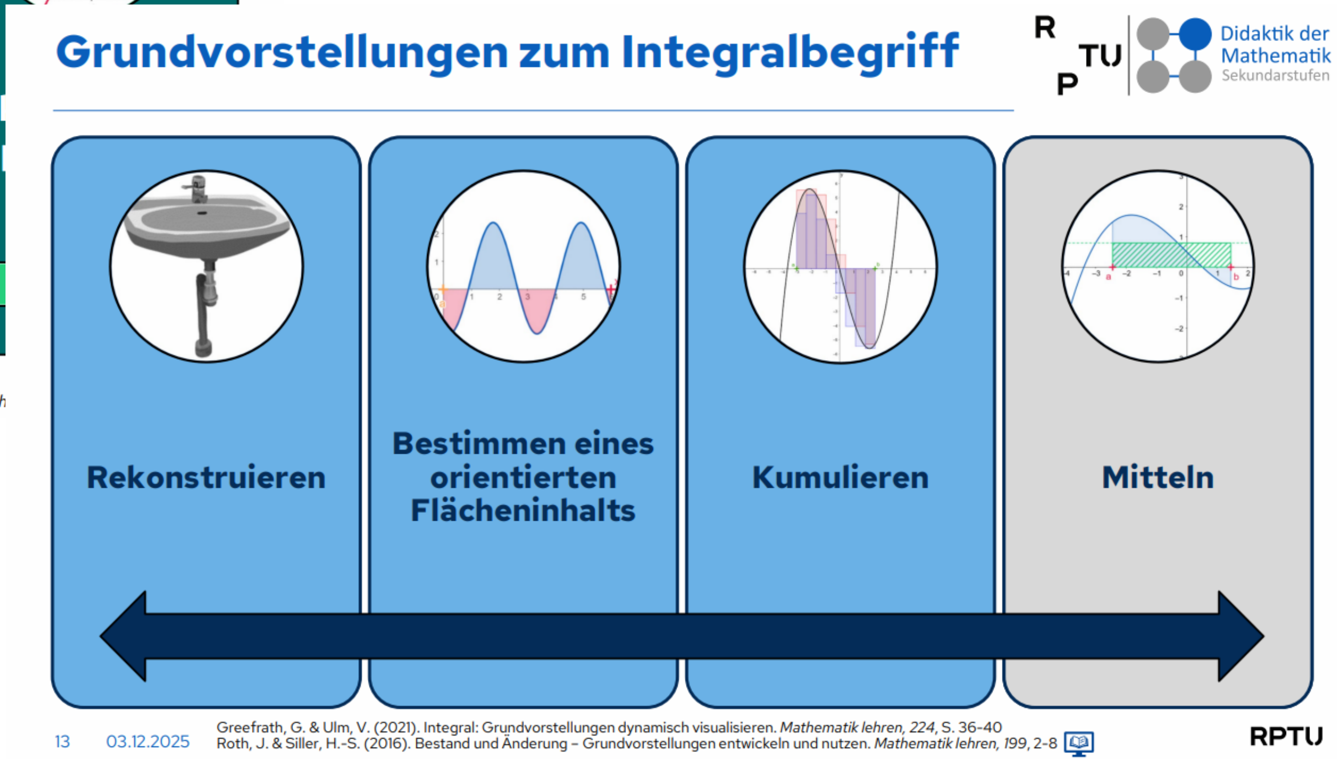
Kovariation

Zuordnung



Wiederholung:
Didaktik der Analysis





Begriffsklärungen

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

MaTeGnu

Grund-vorstellung

- Tragfähiges mentales Modell für einen Begriff oder ein Verfahren
- Grundlage für die Verständnisentwicklung

Begriffe rund ums Verständnis

Grund-fertigkeit

- Anwendung von Routinekalkülen
- Anwendung des Grundwissens in einer typischen Situation (geforderte Operation vorgegeben)

Grund-wissen

- für einen Inhaltsbereich grundlegende Fakten (Begriffe, Definitionen, Sätze, …)
- sollte auswendig gewusst werden

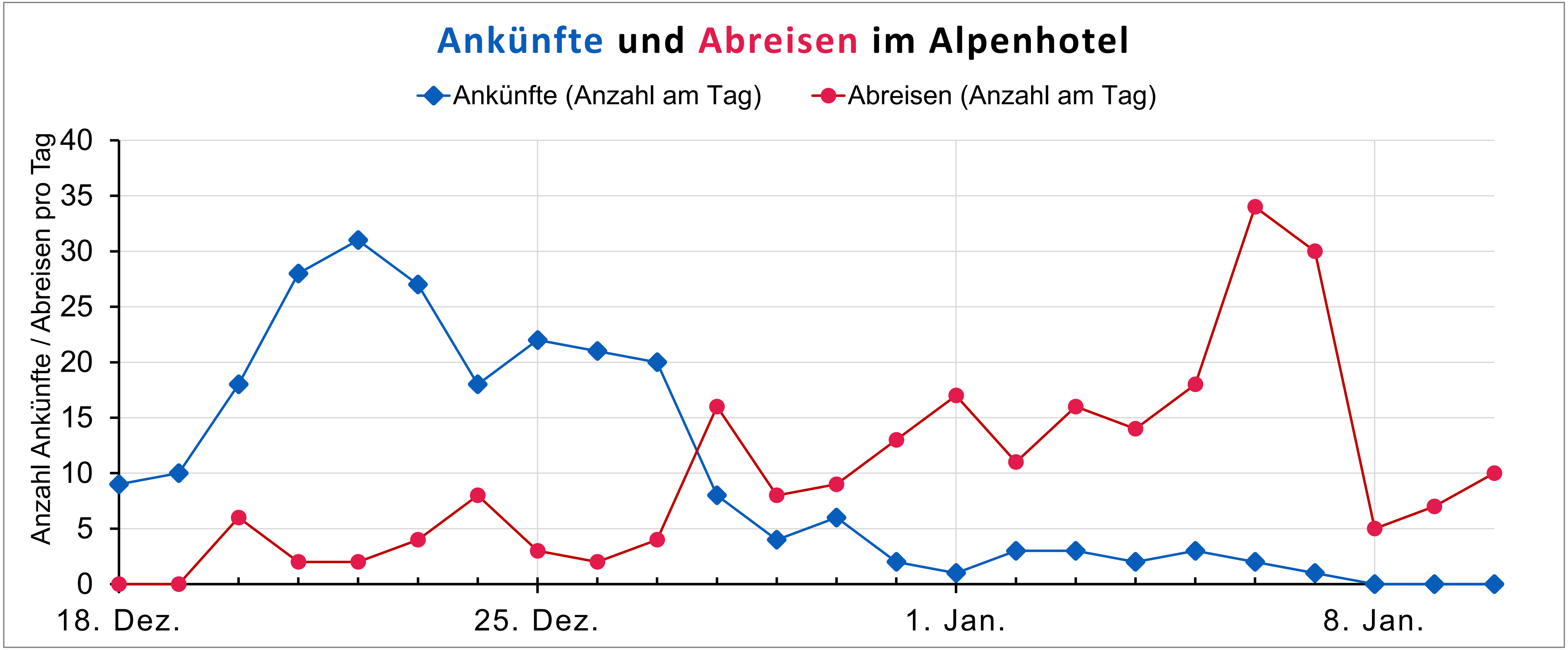
Bestand und Änderung

Bestandsgröße	Zuflüsse	Abflüsse
Anzahl der Studierenden einer Universität	Immatrikulationen	Exmatrikulationen, Ausscheiden aus der Universität
Benzinmenge im Tank	Tanken an der Tankstelle	Benzinverbrauch, Verdunstung
Kontostand	Zubuchungen	Abbuchungen
Anzahl der Gäste eines Hotels	ankommende Gäste	abreisende Gäste
Staatsverschuldung	Staatseinnahmen	Staatsausgaben

Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren, 199*, 2-9
Ossimitz, G. (2003). Zeitliche Dynamik verstehen. *Mathematik lehren, 120*, 60-63

Bestand und Änderung

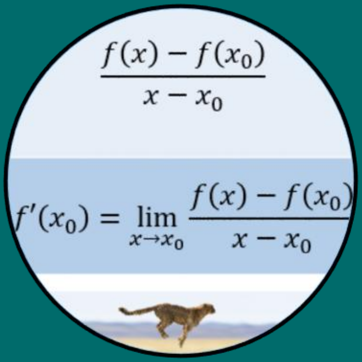
Wann waren die meisten Gäste im Hotel?



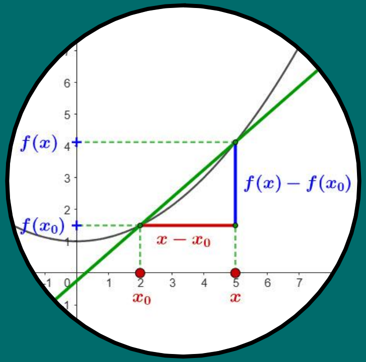
Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren, 199*, 2-9
Ossimitz, G. (2003). Zeitliche Dynamik verstehen. *Mathematik lehren, 120*, 60-63

https://www.geogebra.org/m/eg5dwnjy

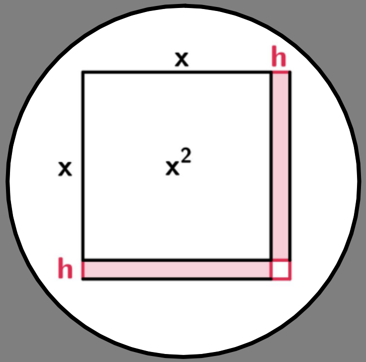
Grundvorstellungen zum Ableitungsbegriff



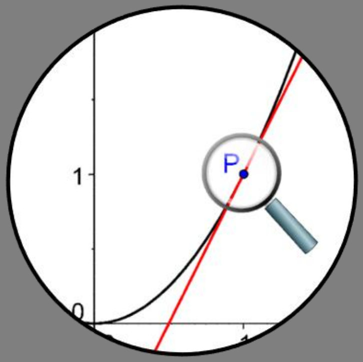
Lokale Änderungsrate



Tangenten-steigung



Verstärkungs-faktor



lokale lineare Approximation

Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren*, *199*, 2-8

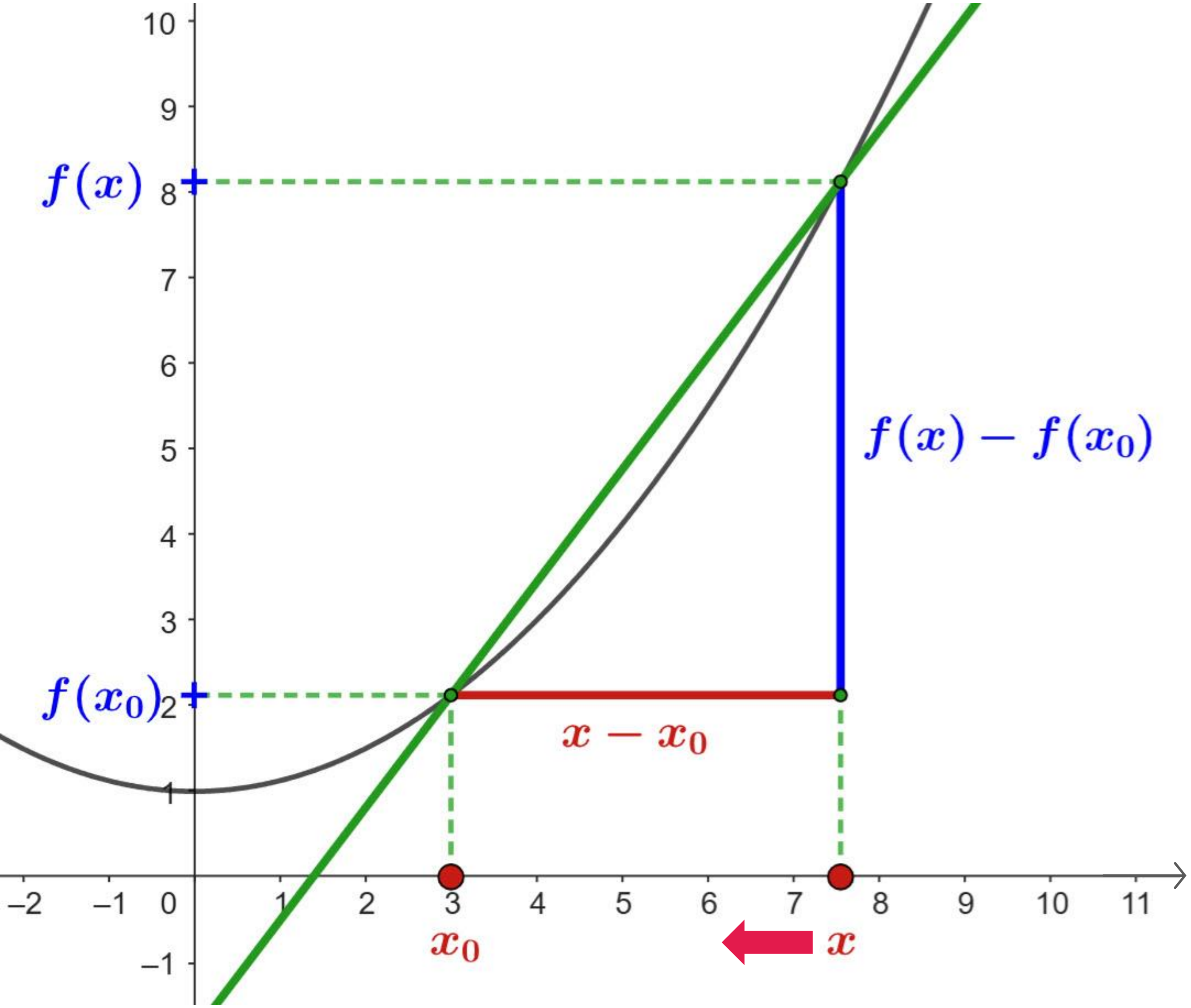
Ableitung als lokale Änderungsrate

Beschrei-bungsebene	Schritt 1	Schritt 2	Schritt 3	Schritt 4
formal	$f(x_0)$	$f(x)-f(x_0)$	$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$	$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
inhaltlich	**Bestand** zum Zeitpunkt x_0	***absoluter* Zuwachs** in der Zeit von x_0 bis x	***relativer* Zuwachs** im Zeitintervall $[x_0, x]$ (***mittlere* Änderungsrate**)	momentane (***lokale***) **Änderungsrate** zum Zeitpunkt x_0
termino-logisch	Funktionswert	Differenz der Funktionswerte	Differenzenquotient	Ableitung

algebraisch **analytisch**

Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren 199*, 2-8

Ableitung als Tangentensteigung



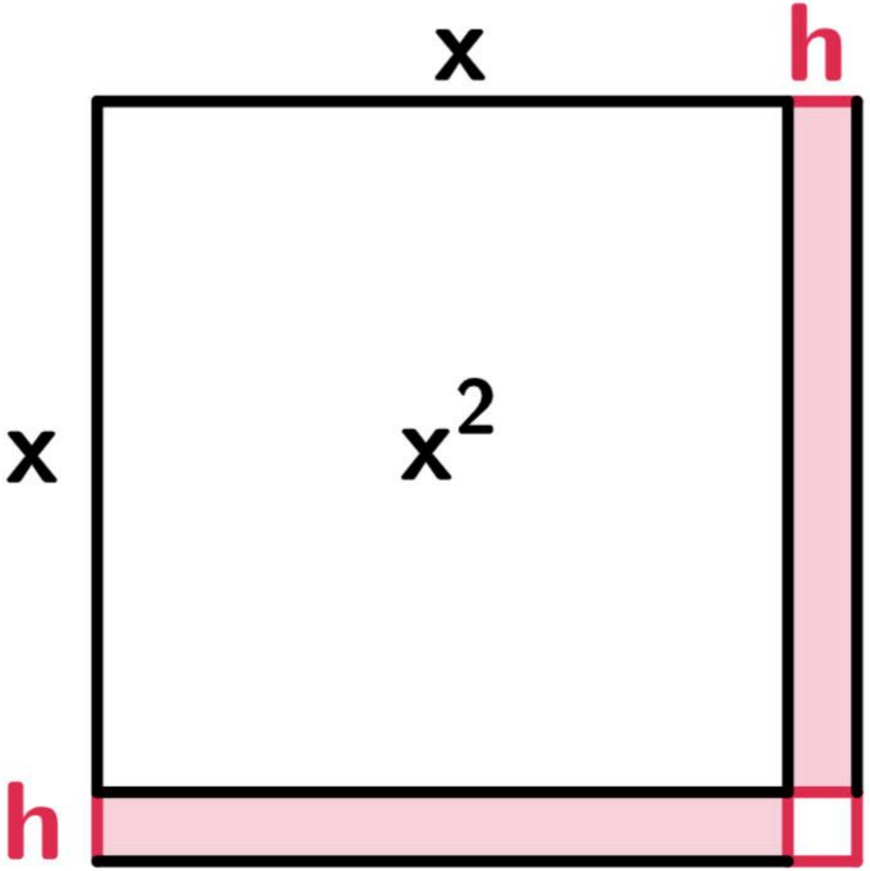
Definition der Steigung einer Kurve im Punkt P über die Steigung der Tangente in P

Tangente als Grenzlage von Sekanten

Bestimmung der Tangentensteigung als Grenzwert von Sekantensteigungen

Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren 199*, 2-8

Ableitung als Verstärkungsfaktor



$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$$

Die Ableitung gibt an, wie stark sich die Änderung der unabhängigen Variable auf die abhängige Variable auswirkt.

Hohe Werte der Ableitung bedeuten schnelle bzw. starke Änderung der Funktionswerte.

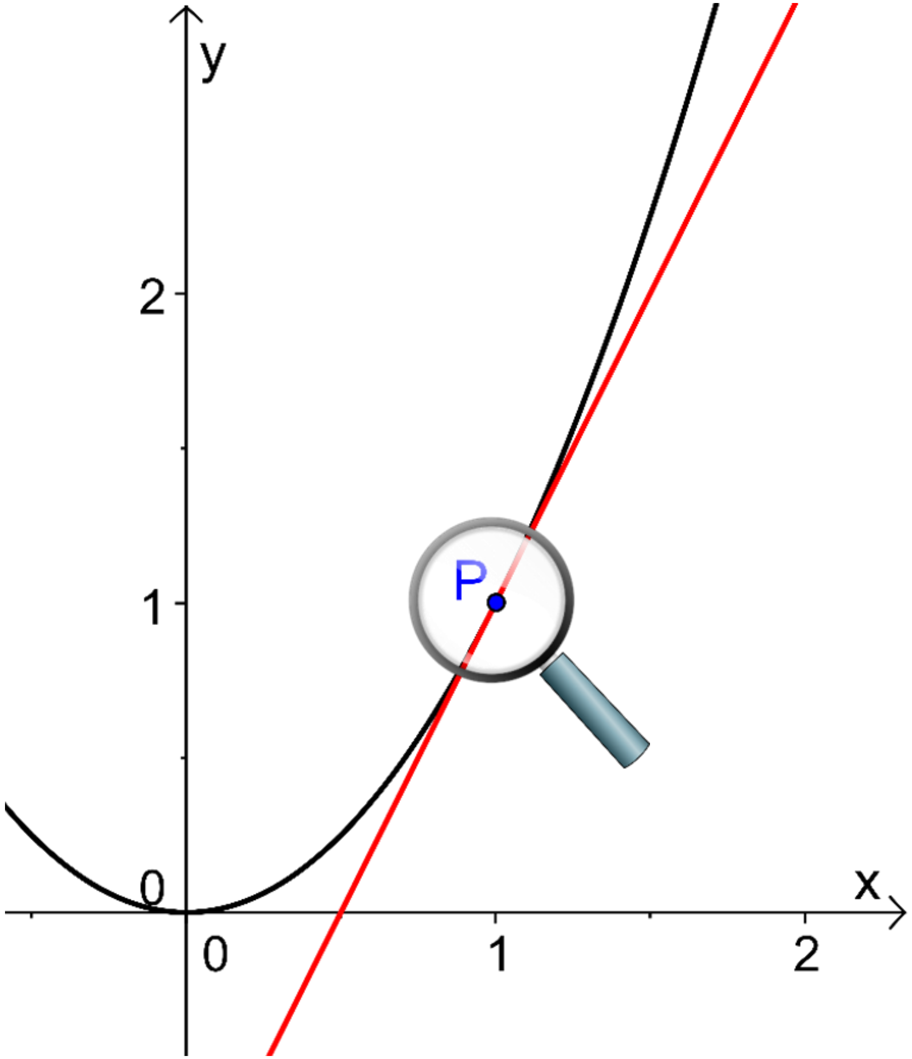
Für kleine Änderungen Δx gilt:

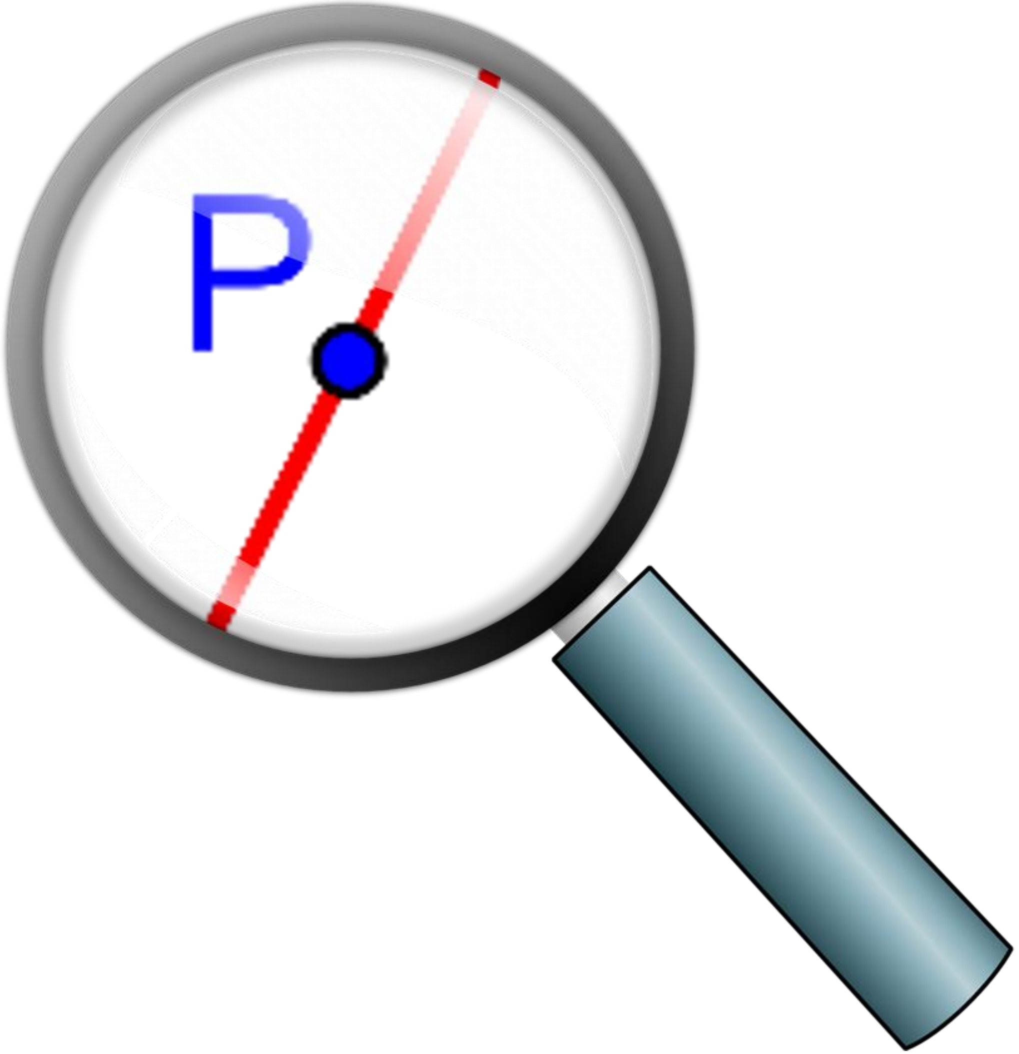
$$\Delta y \approx \underbrace{f'(x)}_{\text{Verstärkungsfaktor}} \cdot \Delta x$$

Greefrath, G. et al. (2016). Didaktik der Analysis – Aspekte & Grundvorstellungen zentraler Begriffe. Berlin: Springer Spektrum, 151ff

Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren 199*, 2-8

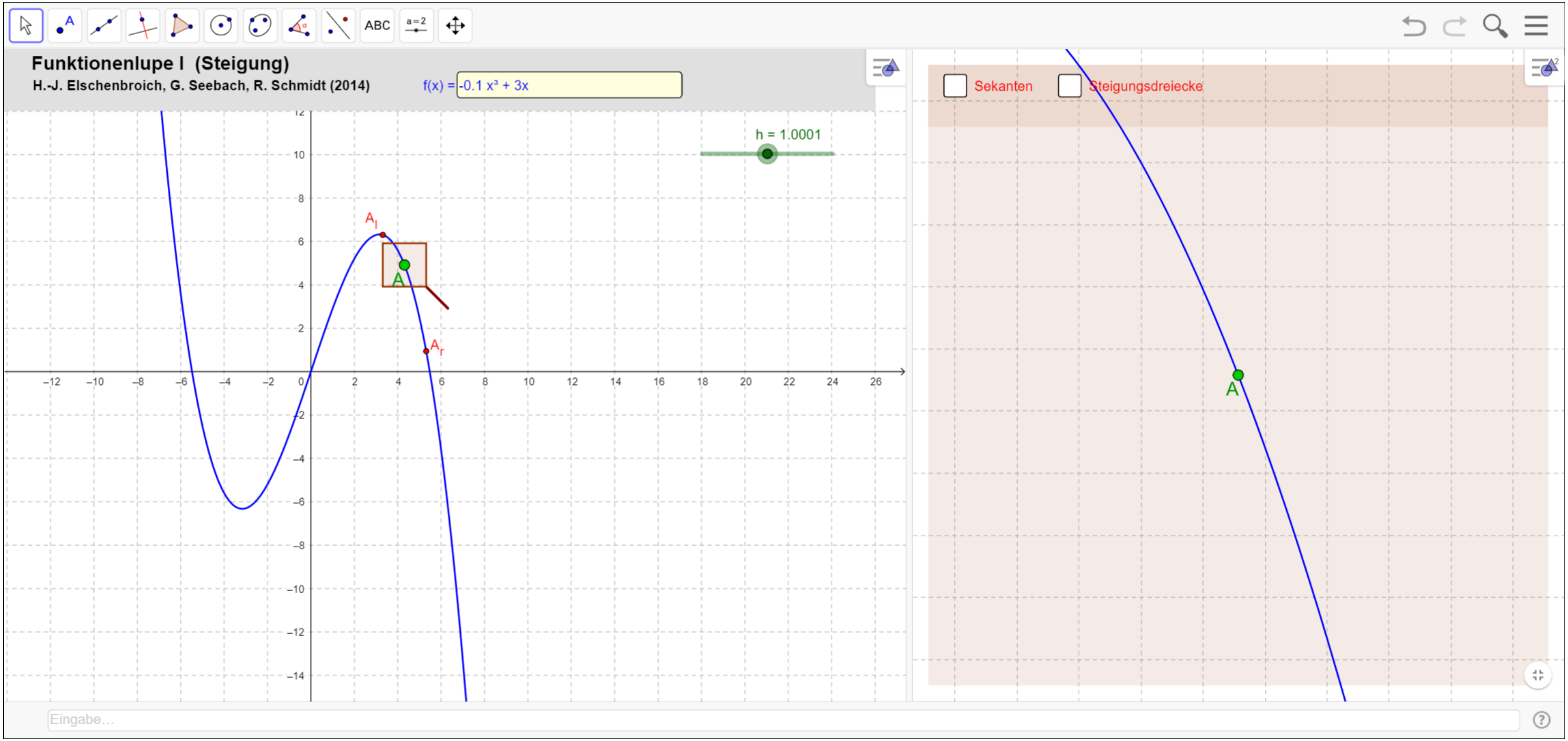
Ableitung als lokale lineare Approximation





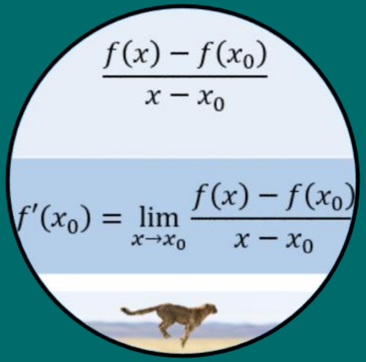
Danckwerts, R. & Vogel, D. (2006). Analysis verständlich unterrichten. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 68-91
www.funktionenlupe.de • https://www.geogebra.org/m/VNbhnUtq https://www.geogebra.org/m/tejWrTyU

Funktionenlupe

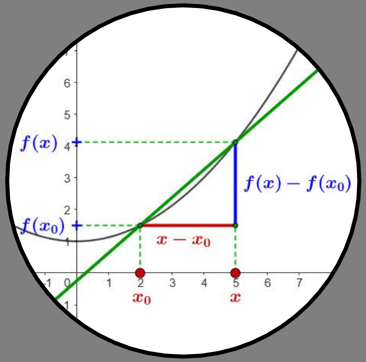


 https://www.geogebra.org/m/QxeVkgpf#material/VNbhnUtq

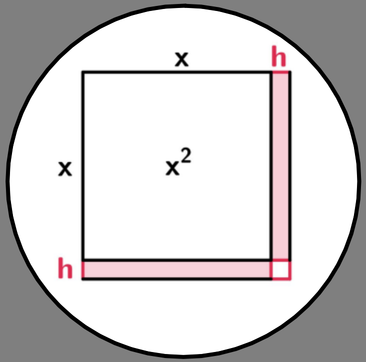
Grundvorstellungen zum Ableitungsbegriff



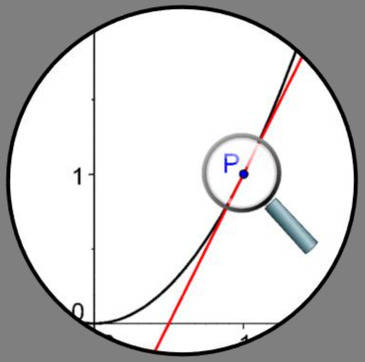
Lokale Änderungsrate



Tangentensteigung



Verstärkungsfaktor



lokale lineare Approximation

Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren*, *199*, 2-8

Lokale Änderungsrate

Verständnisanker: Der Gepard, das schnellstes Landtier

- Geparden erreichen über längere Strecken eine Durchschnittsgeschwin-digkeit von $50\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ und sind mit einer momentanen Spitzengeschwindigkeit von $93\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ die schnellsten Landtiere.
- In Versuchen wurden Hochgeschwindigkeits-kameras und am Boden installierte Kraftmess-platten eingesetzt.

Wilson, A. M. et al. (2013). Locomotion dynamics of hunting in wild cheetahs, Nature, doi:10.1038/nature12295

Kernfrage

- Wie bestimmt man mit den Videoaufnahmen die Geschwindigkeiten?
- Ein Applet simuliert die Videoaufnahmen.

https://mategnu.de/m/l1

Lokale Änderungsrate

Verständnisanker: Der Gepard, das schnellstes Landtier

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Absolute Änderung: Zwischen zwei Zeitpunkten $\boldsymbol{x_1}$ und $\boldsymbol{x_2}$ zurückgelegter Weg $\boldsymbol{f(x_2) - f(x_1)}$.

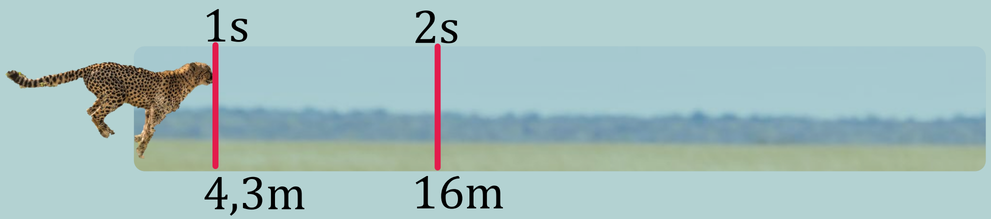
Bewegungen: Die Weg-Zeit-Funktion $x \mapsto f(x)$ ordnet jedem Zeitpunkt x den bis dahin zurückgelegten Weg $f(x)$ zu.

Erste Sekunde

$f(1\text{s}) - f(0\text{s}) = 4{,}3\text{m} - 0\text{m} = 4{,}3\text{m}$

Zweite Sekunde

$f(2\text{s}) - f(1\text{s}) = 16\text{m} - 4{,}3\text{m} = 11{,}7\text{m}$



Dritte Sekunde

$f(3\text{s}) - f(2\text{s}) = 33{,}3\text{m} - 16\text{m} = 17{,}3\text{m}$

Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren 199*, 2-8

Lokale Änderungsrate

Verständnisanker: Der Gepard, das schnellstes Landtier

Absolute Änderung: Zwischen zwei Zeitpunkten $\boldsymbol{x_1}$ und $\boldsymbol{x_2}$ zurückgelegter Weg $\boldsymbol{f(x_2)-f(x_1)}$.

In den zwei Sekunden von $x_1 = 1\mathrm{s}$ bis $x_2 = 3\mathrm{s}$ zurückgelegter Weg

$$f(x_2)-f(x_1) = f(3\mathrm{s})-f(1\mathrm{s})$$
$$= 33{,}3\mathrm{m} - 4{,}3\mathrm{m} = 29\mathrm{m}$$

Zeit-punkt x	zurückgelegter Weg $f(x)$
0s	0m
1s	4,3m
2s	16m
3s	33,3m

Zeitänderung $\Delta x = 1\mathrm{s}$ — Wegänderung $\Delta f(x) = 4{,}3\mathrm{m}$

Zeitänderung $\Delta x = 1\mathrm{s}$ — Wegänderung $\Delta f(x) = 11{,}7\mathrm{m}$

Zeitänderung $\Delta x = 2\mathrm{s}$ — Wegänderung $\Delta f(x) = 29\mathrm{m}$

Zeitänderung $\Delta x = 1\mathrm{s}$ — Wegänderung $\Delta f(x) = 17{,}3\mathrm{m}$

Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren 199*, 2-8

Lokale Änderungsrate

Verständnisanker: Der Gepard, das schnellstes Landtier

Relative Änderung / Änderungsrate: Durchschnittsgeschwindigkeit

Um die mittleren Geschwindigkeiten in unterschiedlich langen Zeitintervallen $[x_1, x_2]$ und $[x_3, x_4]$ vergleichen zu können, muss man jeweils die **Wegdifferenz** $\boldsymbol{f(x_2) - f(x_1)}$ auf die zugehörige **Zeitdifferenz** $\boldsymbol{x_2 - x_1}$ beziehen:

$$\frac{\boldsymbol{f(x_2) - f(x_1)}}{\boldsymbol{x_2 - x_1}}$$

Im Zeitintervall $[2\text{s}, 3\text{s}]$ werden im Mittel $\frac{33{,}3\text{m} - 16\text{m}}{3\text{s} - 2\text{s}} = \frac{11{,}7\text{m}}{1\text{s}} = 17{,}3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, also 17,3 Meter pro Sekunde zurückgelegt.

Im Zeitintervall $[1\text{s}, 3\text{s}]$ werden im Mittel $\frac{33{,}3\text{m} - 4{,}3\text{m}}{3\text{s} - 1\text{s}} = \frac{29\text{m}}{2\text{s}} = 14{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, also 14,5 Meter pro Sekunde zurückgelegt.

Im Zeitintervall $[2\text{s}, 3\text{s}]$ ist die **mittlere Geschwindigkeit (Durchschnitts-geschwindigkeit)** mit $17{,}3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ also höher als im Zeitintervall $[1\text{s}, 3\text{s}]$ mit $14{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren 199*, 2-8

Lokale Änderungsrate

Verständnisanker: Der Gepard, das schnellstes Landtier

Lokale Änderungsrate: Momentangeschwindigkeit

Wie groß ist die **Momentangeschwindigkeit (lokale Änderungsrate)** zu einem Zeitpunkt $x_0 = 2s$?

Idee: Mittlere Geschwindigkeiten in Zeitintervallen betrachten, die $x_0 = 2s$ als Intervallgrenze besitzen.

Zeitinter-vall $[x_1, x_0]$	Mittlere Geschwindigkeit $\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}$ im Zeitintervall $[x_1, x_0]$
$[1s; 2s]$	$\frac{16m - 4{,}3m}{2s - 1s} = 11{,}7\,\frac{m}{s}$
$[1{,}9s; 2s]$	$\frac{16m - 14{,}5483m}{2s - 1{,}9s} = 14{,}517\,\frac{m}{s}$
$[1{,}99s; 2s]$	$\frac{16m - 15{,}8522803m}{2s - 1{,}99s} = 14{,}77197\,\frac{m}{s}$
$[1{,}999s; 2s]$	$\frac{16m - 15{,}9852028003m}{2s - 1{,}999s} = 14{,}7971997\,\frac{m}{s}$

Zeitinter-vall $[x_0, x_2]$	Mittlere Geschwindigkeit $\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$ im Zeitintervall $[x_0, x_2]$
$[2s; 3s]$	$\frac{33{,}3m - 16m}{3s - 2s} = 23{,}25\,\frac{m}{s}$
$[2s; 2{,}1s]$	$\frac{17{,}5077m - 16m}{2{,}1s - 2s} = 15{,}077\,\frac{m}{s}$
$[2s; 2{,}01s]$	$\frac{16{,}1482797m - 16m}{2{,}01s - 2s} = 14{,}82797\,\frac{m}{s}$
$[2s; 2{,}001s]$	$\frac{16{,}0148027997m - 16m}{2{,}001s - 2s} = 14{,}8027997\,\frac{m}{s}$

Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren 199*, 2-8

Lokale Änderungsrate

Verständnisanker: Der Gepard, das schnellstes Landtier

Momentangeschwindigkeit

- Je kleiner das Intervall $[\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{x}]$ wird, je näher also $\boldsymbol{x}$ an $\boldsymbol{x_0 = 2\mathrm{s}}$ heranrückt, desto näher kommt die mittlere Geschwindigkeit dem Wert $14{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.
- Die mittlere Geschwindigkeit kommt dem Wert $14{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ beliebig nah, wenn $\boldsymbol{x}$ genügend nah bei $\boldsymbol{x_0 = 2\mathrm{s}}$ liegt.
- Damit ist die **Momentangeschwindigkeit** (lokale Änderungsrate) zum Zeitpunkt $x_0 = 2\mathrm{s}$ bestimmt. Sie beträgt hier $14{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Lokale Änderungsrate

Ableitung: Verbale Definition im Kontext

- Der Wert, dem sich die mittlere Geschwindigkeit $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ beliebig nah annähert, wenn x gegen x_0 läuft, heißt **Ableitung $f'(x_0)$ von f an der Stelle x_0**.
- Man schreibt dafür: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

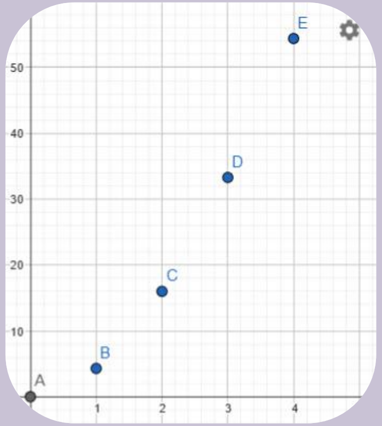
Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren 199*, 2-8

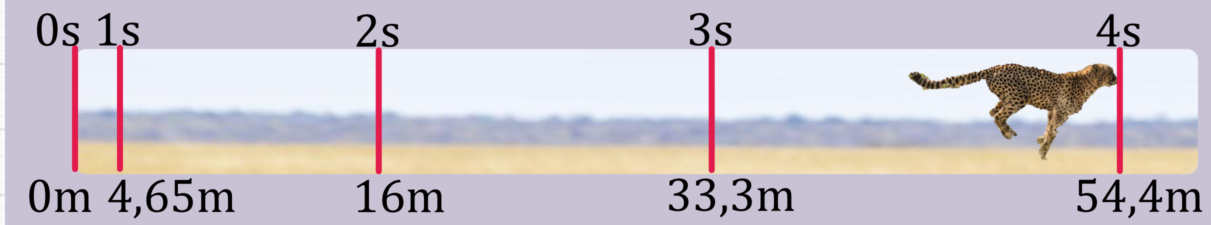
Lokale Änderungsrate

Verständnisanker: Der Gepard, das schnellstes Landtier

Modellierung des Zusammenhangs

- Messwerte im Koordinatensystem darstellen
- **Vermutung:** Parabelast
  $\Rightarrow$ Quadratischer Zusammenhang $f(x) = a \cdot x^2$, mit unbekanntem Parameter a.





- Mit $f(x) = a \cdot x^2$ ergibt sich für die mittlere Geschwindigkeit im Intervall $[x_0, x] = [2s, x]$ der Wert: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(2s)}{x-2s} = \frac{a\cdot(x^2-(2s)^2)}{x-2s} = a \cdot \frac{(x+2s)\cdot(x-2s)}{x-2s} = a \cdot (x + 2s)$
- $a \cdot (x + 2s)$ kommt dem Wert $14{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ beliebig nahe, wenn x genügend nahe bei $x_0 = 2s$ liegt.
- Damit lässt sich der Parameter a aus $a \cdot (2s + 2s) = 14{,}8\,\frac{m}{s}$ berechnen: $a = \frac{14{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{2s+2s} = 3{,}7\,\frac{\mathrm{m}}{s^2}$.
- **Überprüfen:** Eingabe der Funktionsgleichung $f(x) = 3{,}7 \cdot x^2$ in GeoGebra.

Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren 199*, 2-8

Sprechweisen für Grenzprozesse

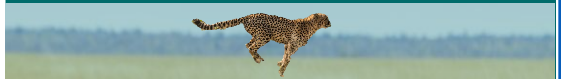
Aufgabe: Konvergenz von $\frac{f(x)-f(2s)}{x-2s}$ für $x \to 2s$: Welche Sprechweisen sind dafür geeignet?

Sprechweisen		Verbale Vereinfachung ↔ Verfälschung
„$\frac{f(x)-f(2s)}{x-2s}$ kommt dem Wert $14{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ beliebig nahe, wenn x gegen 2s läuft.“	1	Ohne Einschränkung geeignet.
„$\frac{f(x)-f(2s)}{x-2s}$ strebt gegen $14{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ für x gegen 2s.“	2	Ohne Einschränkung geeignet.
„$\frac{f(x)-f(2s)}{x-2s}$ kommt dem Wert $14{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ immer näher, wenn x gegen 2s läuft.“	3	Problematisch! $\frac{f(x)-f(2s)}{x-2s}$ kommt auch der 10 immer näher, aber nicht *beliebig nahe* (vgl. (1)) 1
„$\frac{f(x)-f(2s)}{x-2s}$ kommt dem Wert $14{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ immer näher, ohne ihn jemals zu erreichen.“	4	Grenze zur inhaltlichen Verfälschung über-schritten! Bei konstanten Funktionen kon-vergiert der Differenzenquotient (gegen 0).

Wissensspeicher:

Ableitung als lokale Änderungsrate

RPTU Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Beispiel: Gepard 	Bedeutung	Mathematischer Ausdruck	Kontext 2	Kontext 3
Bis zum Zeitpunkt x_0 zurückgelegter Weg	Bestand	$f(x_0)$		
In der Zeit von x_0 bis x zurückgelegter Weg	Absolute Änderung	$f(x) - f(x_0)$		
Durchschnitts-geschwindigkeit im Zeit**RAUM** von x_0 bis x	Mittlere (durchschnittliche) Änderungsrate	$\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$		
Momentan-geschwindigkeit zum Zeit**PUNKT** x_0	Momentane (lokale) Änderungsrate	$f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$		

Lokale Änderungsrate

Verständnisanker: Der Gepard, das schnellstes Landtier

Vorteile

des Zugangs zum Ableitungsbegriff als Übergang von der mittleren zur lokalen Änderungsrate:

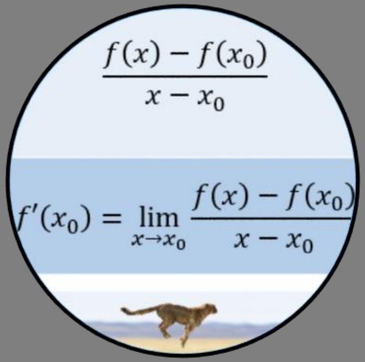
- Kinematischer Kontext ist Teil der Alltagserfahrungen von Jugendlichen. (Straßenverkehr, Computerspiele, Sport, …)
- Zeitliche Änderung von Geschwindigkeiten
  → Zugang zum Begriff Momentanbeschleunigung
- Das Beispiel ist als universelles Modell überall tragfähig, wo ein Änderungsverhalten punktuell beschrieben werden soll.
  → Diese Grundvorstellung ist in vielen Zusammenhängen notwendig.
- Anschlussfähig an anderen Grundvorstellungen
  → Start mit der Ableitung als Tangentensteigung führt oft zu einseitiger Sichtweise.

Geparden beschleunigen auch am besten und können mit einem „Satz“ knapp 11 km/h an Tempo hinzugewinnen.

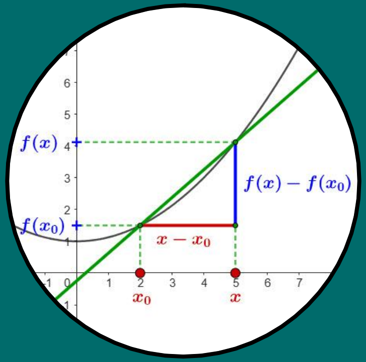
Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren*, *199*, 2-8

Grundvorstellungen zum Ableitungsbegriff

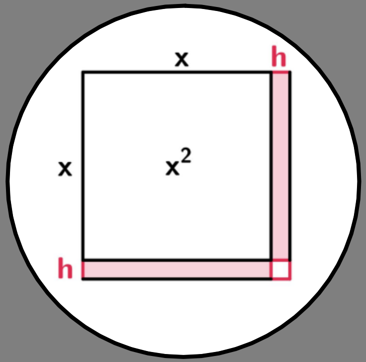
Didaktik der Mathematik Sekundarstufen



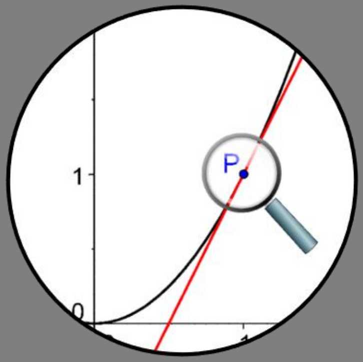
Lokale Änderungsrate



Tangenten-steigung



Verstärkungs-faktor



lokale lineare Approximation

Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren*, *199*, 2-8

Ableitung als Tangentensteigung

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Aspekte bei diesem Zugang

Definition der Steigung einer Kurve im Punkt P über die Steigung der Tangente in P

Tangente als Grenzlage von Sekanten

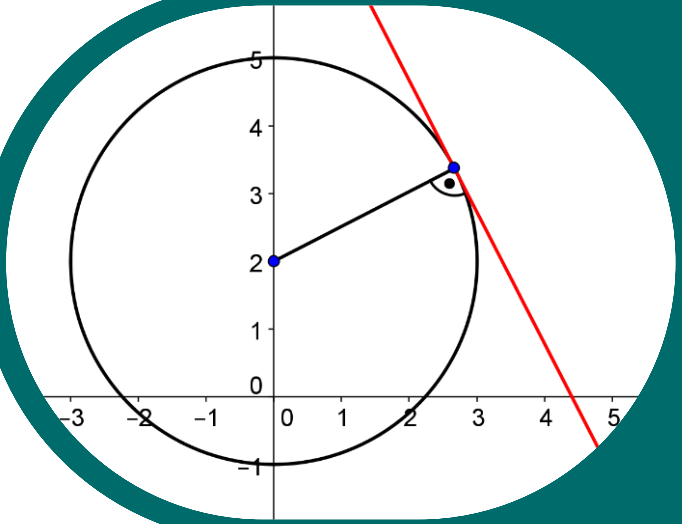
Berechnung der Tangentensteigung als Grenzwert von Sekantensteigungen

Zu beachten ist:

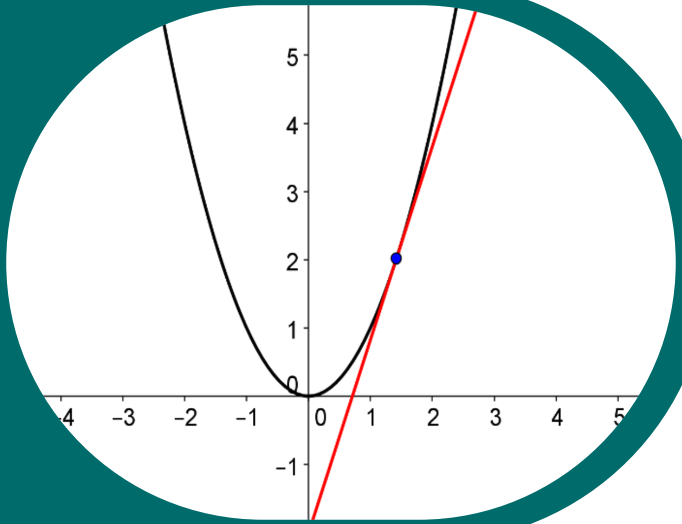
Paradigmenwechsel vom geometrischen zum analytischen Tangentenbegriff

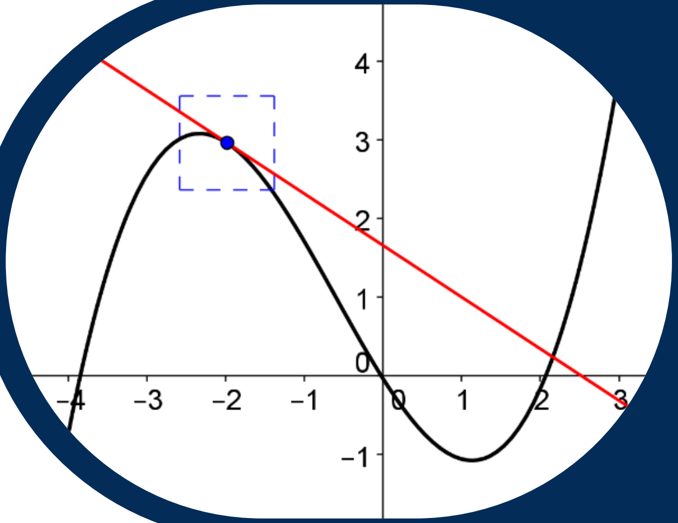
Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren 199*, 2-8

Was ist eine Tangente?



Geometrische Sichtweise:
Tangente
als globale
Stützgerade





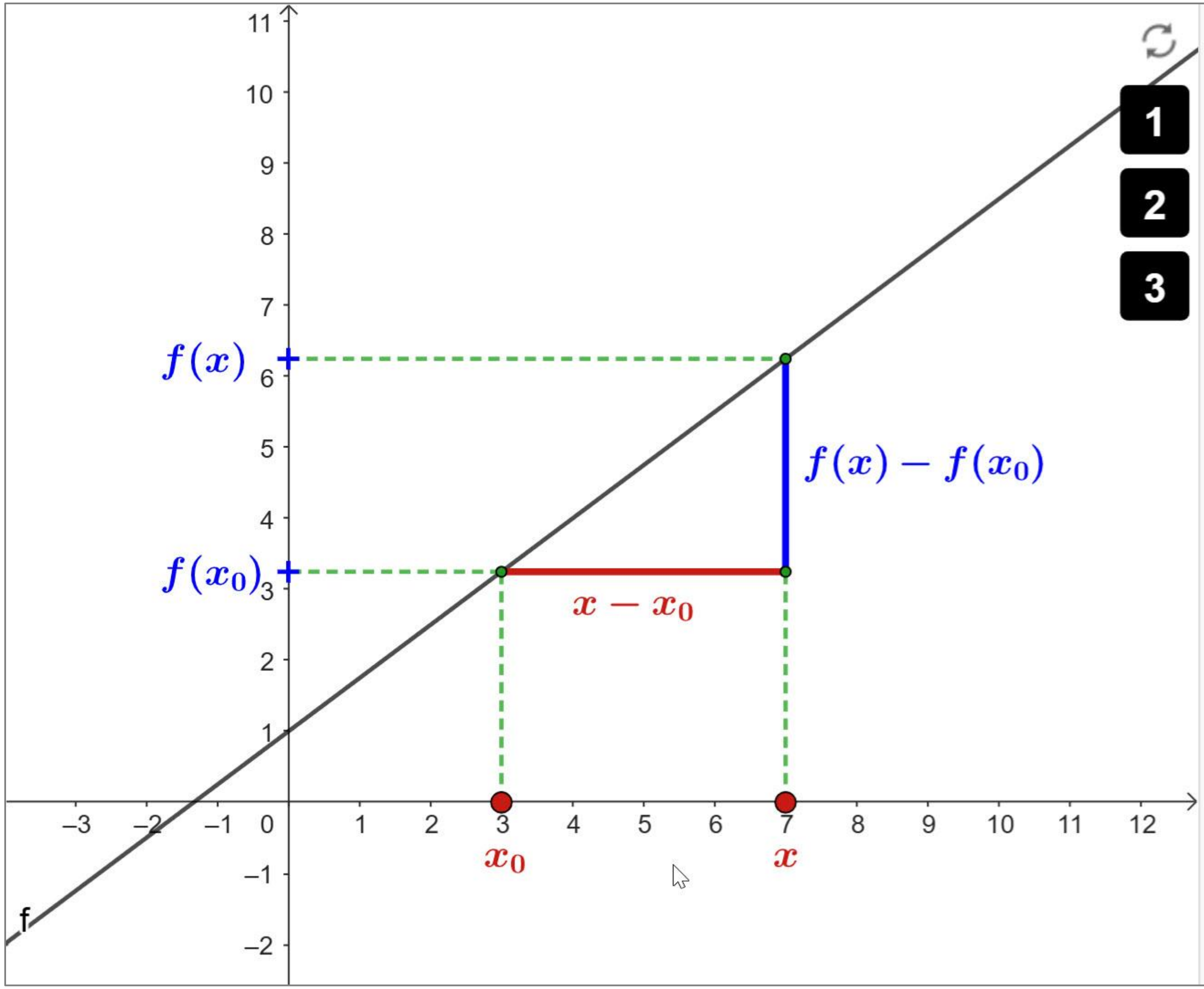
Analytische Sichtweise:
Tangente
als lokale
Schmieggerade

Ableitung als Tangentensteigung

Aspekte bei diesem Zugang	Zu beachten ist:
Definition der Steigung einer Kurve im Punkt P über die Steigung der Tangente in P	Paradigmenwechsel vom geometrischen zum analytischen Tangentenbegriff
Tangente als Grenzlage von Sekanten	Liegt quer zur Schmieg-Vorstellung der Tangente
Berechnung der Tangentensteigung als Grenzwert von Sekantensteigungen	Gibt es einen Grenzfall von Sekanten? Eine Gerade durch einen Punkt ist gar nicht eindeutig festgelegt.

Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren 199*, 2-8

Vorwissen reaktivieren: Geradensteigung



$f(x) = \frac{3}{4}x + 1$

- [x] Zuordnung
- [x] Absolute Änderung
- [ ] Änderungsrate (relative Änderung)

Absolute Änderung der x-Werte

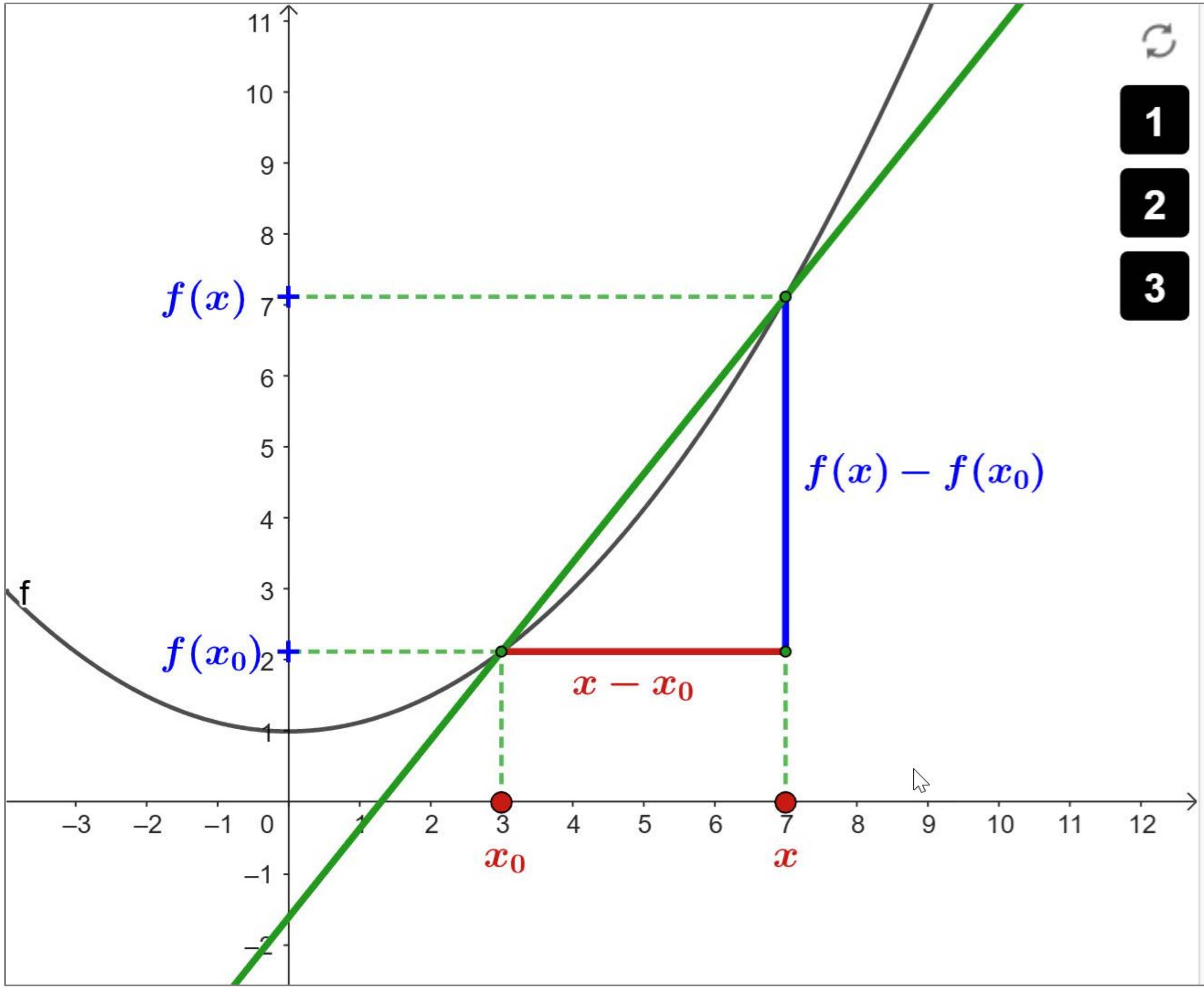
$$x - x_0 = 7 - 3 = 4$$

Absolute Änderung der Funktionswerte

$$f(x) - f(x_0) = 6.25 - 3.25 = 3$$

Lokale Steigung als Tangentensteigung

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen



$f(x) = \frac{1}{8}x^2 + 1$

☑ Zuordnung ☑ Absolute Änderung

☑ Änderungsrate (relative Änderung)

Absolute Änderung der x-Werte

$x - x_0 = 7 - 3 = 4$

Absolute Änderung der Funktionswerte

$f(x) - f(x_0) = 7.125 - 2.125 = 5$

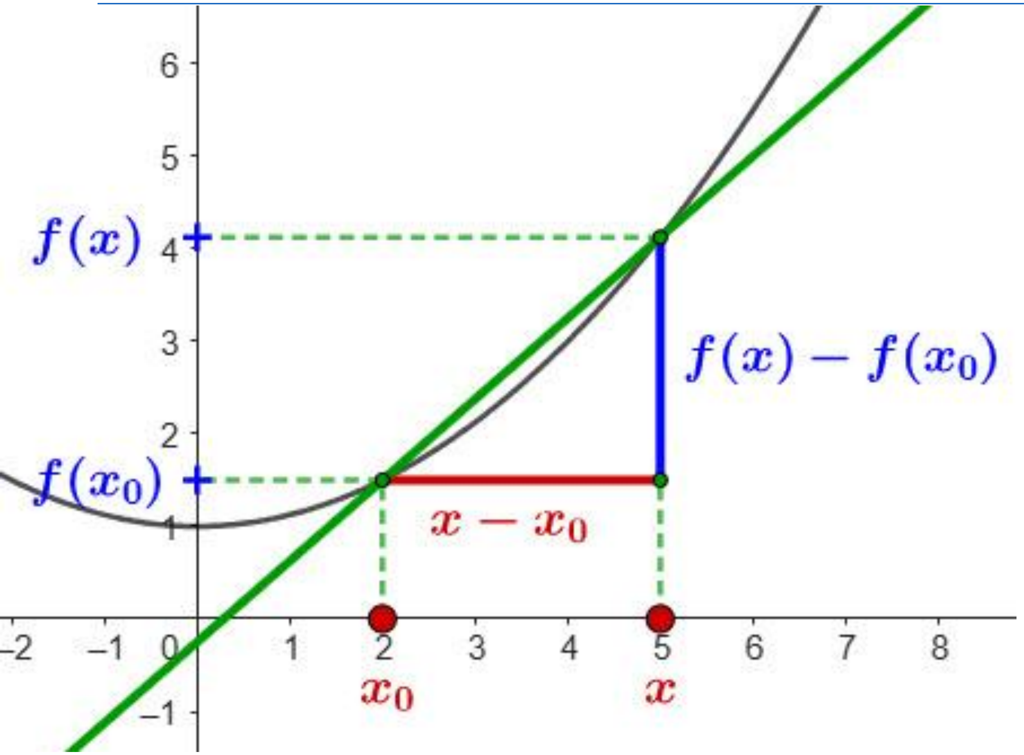
Änderungsrate (Relative Änderung)

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{7.125-2.125}{7-3} = 1.25$$

☑ Sekante ☐ Tangente

Tangente als Grenzlage von Sekanten

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen



Beispiel: $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto \frac{1}{8}x^2 + 1$

Gesucht: Tangentensteigung an der Stelle $x_0 = 2$

Sekantensteigung

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{\frac{1}{8} \cdot x^2 + 1 - \left(\frac{1}{8} \cdot 2^2 + 1\right)}{x - 2}$$

$$= \frac{\frac{1}{8} \cdot (x^2 - 4)}{x - 2} = \frac{\frac{1}{8} \cdot (x + 2) \cdot (x - 2)}{x - 2}$$

$x \neq 2$

$$= \frac{1}{8} \cdot (x + 2)$$

Sprechweise

Die Sekantensteigung kommt der Zahl $\frac{1}{2}$ beliebig nahe, wenn x gegen $x_0 = 2$ strebt.

Tangentensteigung

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{\frac{1}{8} \cdot (x + 2) \cdot (x - 2)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{1}{8} \cdot (x + 2) = \frac{1}{2}$$

Definition:
Differenzierbarkeit und Ableitung

Definition

Eine Funktion $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{R}, \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$ heißt an der Stelle $x_0 \in \mathbb{D}$ differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert.

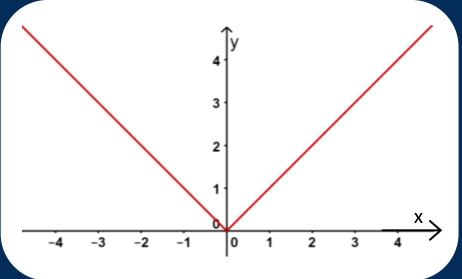
Der Grenzwert heißt Ableitung von $\boldsymbol{f}$ an der Stelle $\boldsymbol{x_0}$ und wird mit

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

bezeichnet.

Bemerkungen

- Der Grenzwert muss derselbe sein, unabhängig davon, ob man sich der Stelle x_0 von links oder von rechts nähert. Nur in diesem Fall ist f an der Stelle x_0 differenzierbar.
- Die Betragsfunktion $x \mapsto |x|$ ist z. B. an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.



- Genau genommen muss x_0 im Inneren der Definitionsmenge $\mathbb{D}$ von f liegen, weil sonst nur eine einseitige Annäherung an x_0 möglich ist.

Danckwerts, R. & Vogel, D. (2006). *Analysis verständlich unterrichten*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 68-91

3 MaTeGnu Modul 2 Integralrechnung

Verständnisanker

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Verständnisanker
Prototypische Situation zum Ausbilden von Grundvorstellungen & einem Erklärungs-kontext zu einem mathematischen Sachverhalt.

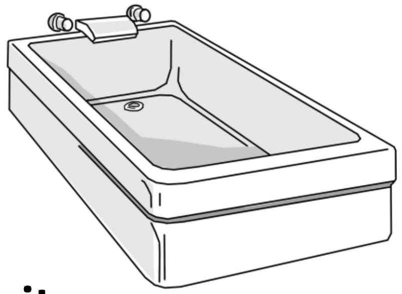
Eine **Situation** eignet sich als Verständnisanker, wenn

- sie leicht durchschaut werden kann und
- alle für ein Verständnis wesentlichen Strukturele-mente vorkommen und gedeutet werden können.

Ziel des Aufbaus eines Verständnisankers
Lernende können in neuen Situationen, in denen der mathematische Sachverhalt eine Rolle spielt, durch Analogiebildung zum Verständnisanker, passende Grundvorstellungen aktivieren.

Beispiel

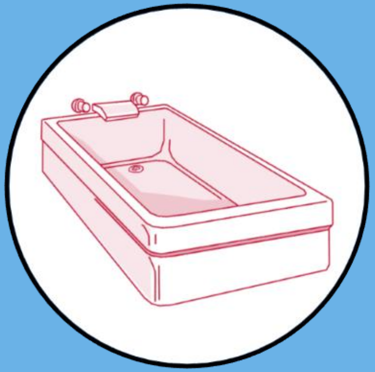
- Ein **Verständnisanker** für Grundvorstellungen zum Integral ist die Frage nach der **Füllmenge einer Badewanne bei bekannter Zu- und Abflussgeschwindigkeit**.



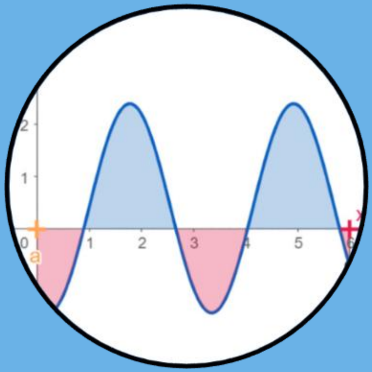
- Anhand der Badewannensituation können die Grundvorstellungen „Integrieren als Rekonstruieren“, „Integrieren als Bestimmen eines orientierten Flächeninhalts“ und „Integrieren als Kumulieren“ inhaltlich durchschaut werden.

Roth, J. & vom Hofe, R. (2023). Verständnisvoll lernen – Grundvorstellungen vernetzen und Verständnisanker nutzen. *Mathematik lehren, 236*, 6-9.

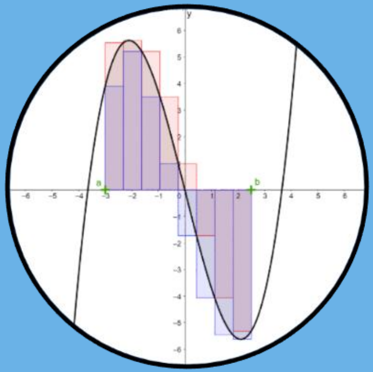
Grundvorstellungen zum Integralbegriff



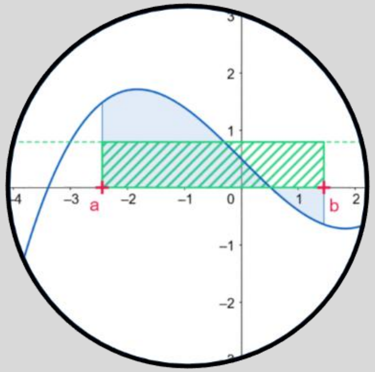
Rekonstruieren



Bestimmen eines orientierten Flächeninhalts



Kumulieren

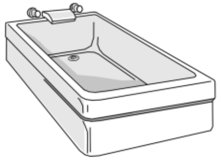


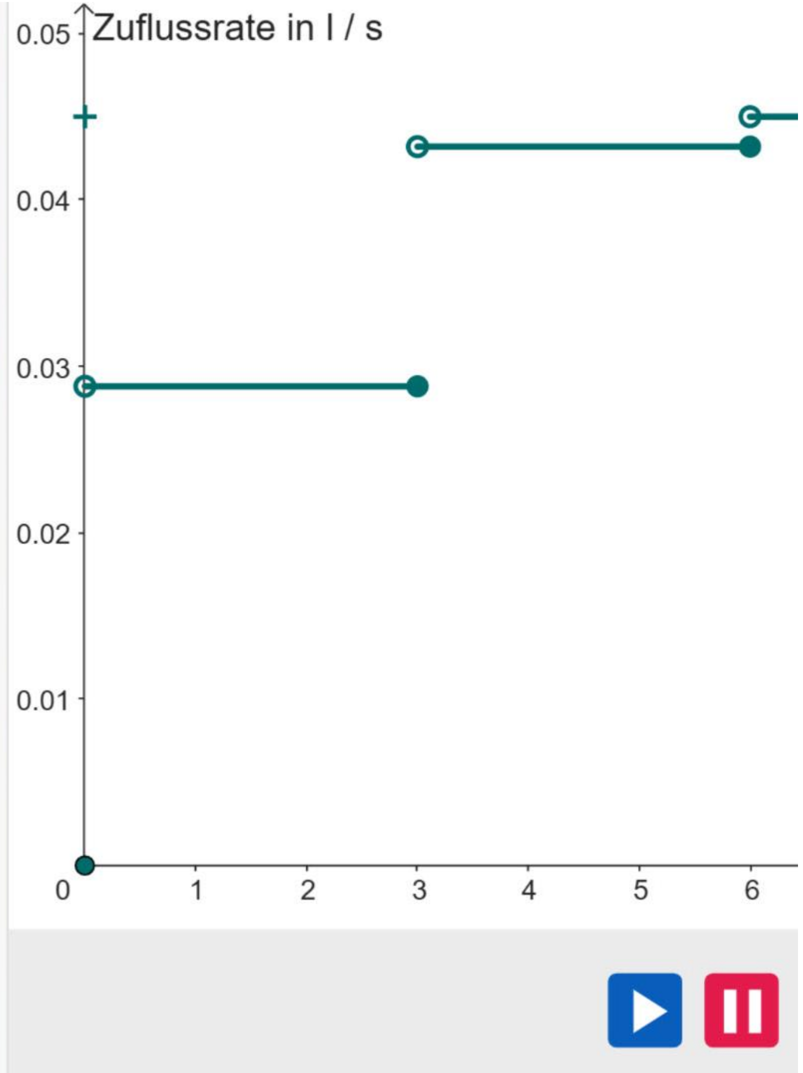
Mitteln

Greefrath, G. & Ulm, V. (2021). Integral: Grundvorstellungen dynamisch visualisieren. *Mathematik lehren, 224*, S. 36-40
Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren, 199*, 2-8

Grundvorstellung:
Integrieren als Rekonstruieren

Verständnisanker
Füllmenge einer Wanne bei bekannter Zu- und Abflussgeschwindigkeit.

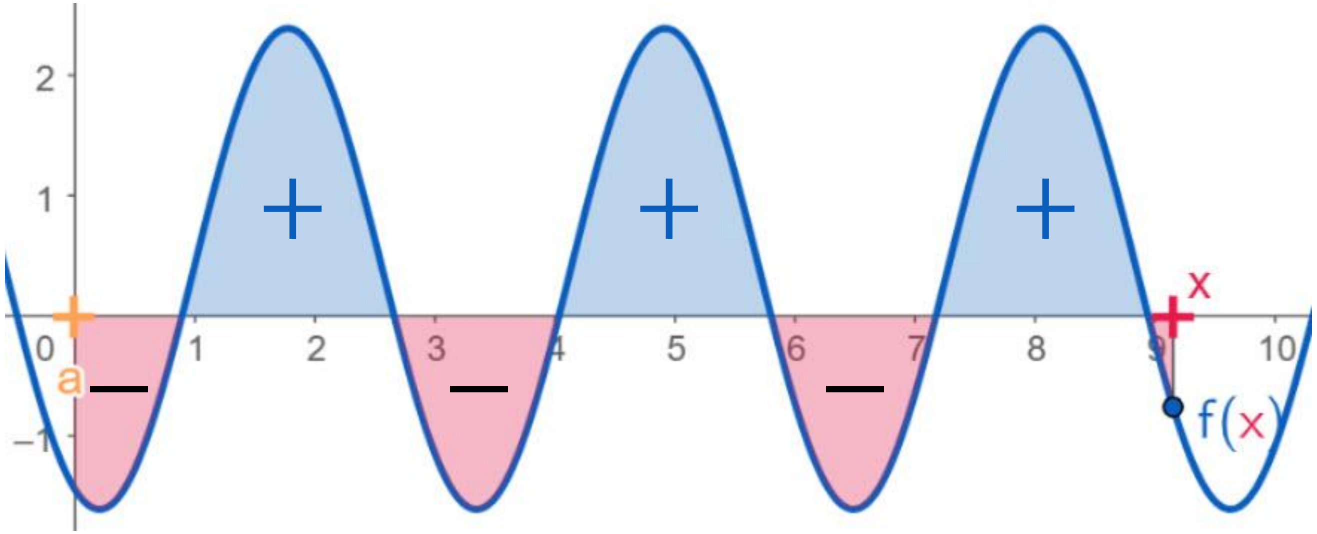




Grundvorstellung
Integrieren als Rekonstruieren
Ein bestimmtes Integral rekonstruiert die Gesamtänderung einer Größe (den Gesamteffekt der Änderung) aus ihrer Änderungsrate.

https://www.geogebra.org/m/nxxgghx3#material/hpca3rmq

Grundvorstellung: Integrieren als Bestimmen eines orientierten Flächeninhalts



Grundvorstellung

Integrieren als Bestimmen eines orientierten Flächeninhalts

Ein bestimmtes Integral ist eine Bilanz von Flächeninhalten.

Orientierter Flächeninhalt

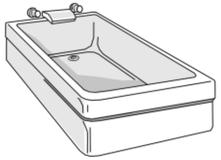
$I_a(x) = \int_a^x f(t)dt$

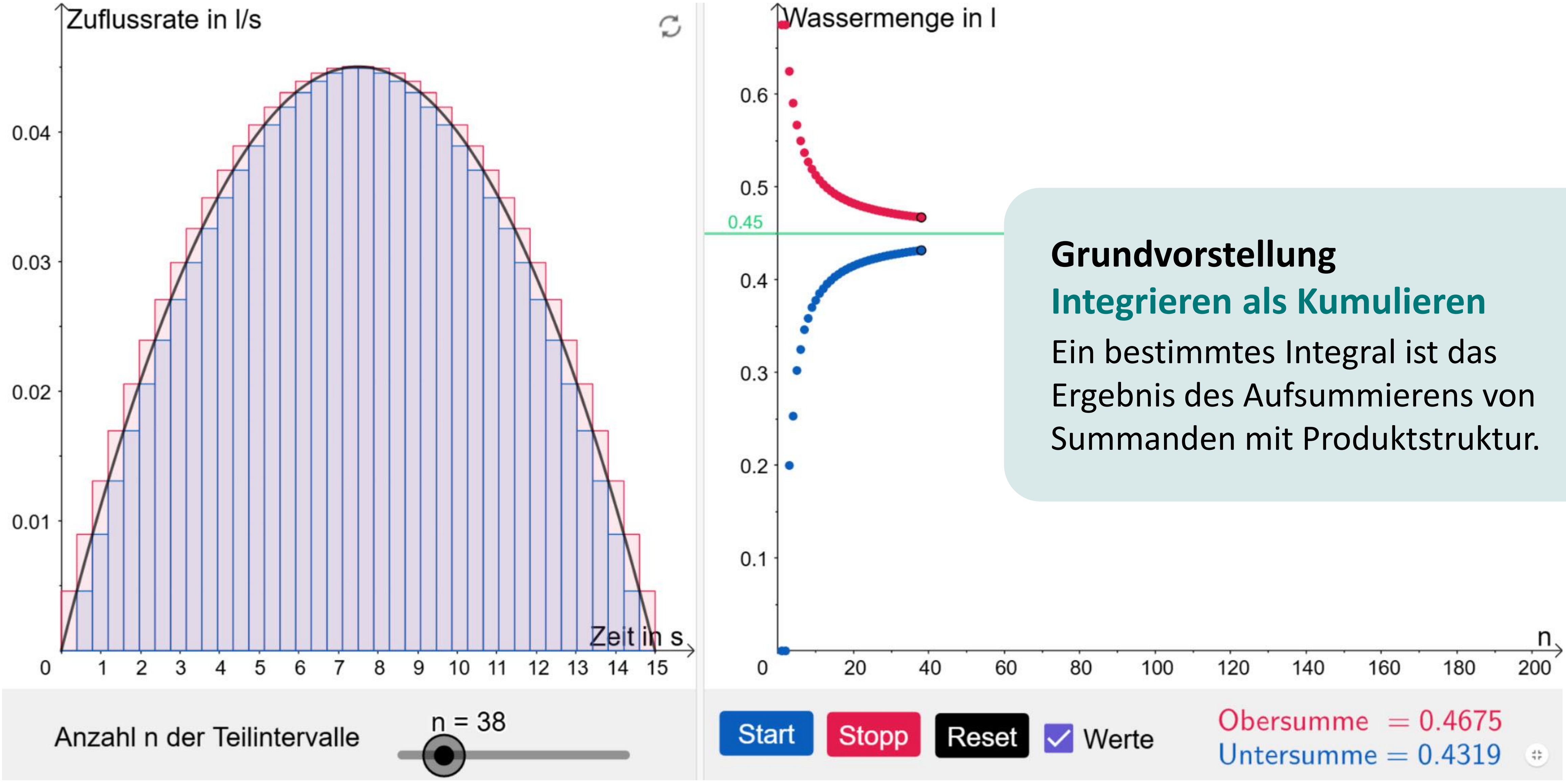
$= ($Summe der Inhalte aller oberhalb der x-Achse liegenden Flächenstücke zwischen $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{x})$

$- ($Summe der Inhalte aller unterhalb der x-Achse liegenden Flächenstücke zwischen $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{x})$

Grundvorstellung:
Integrieren als Kumulieren

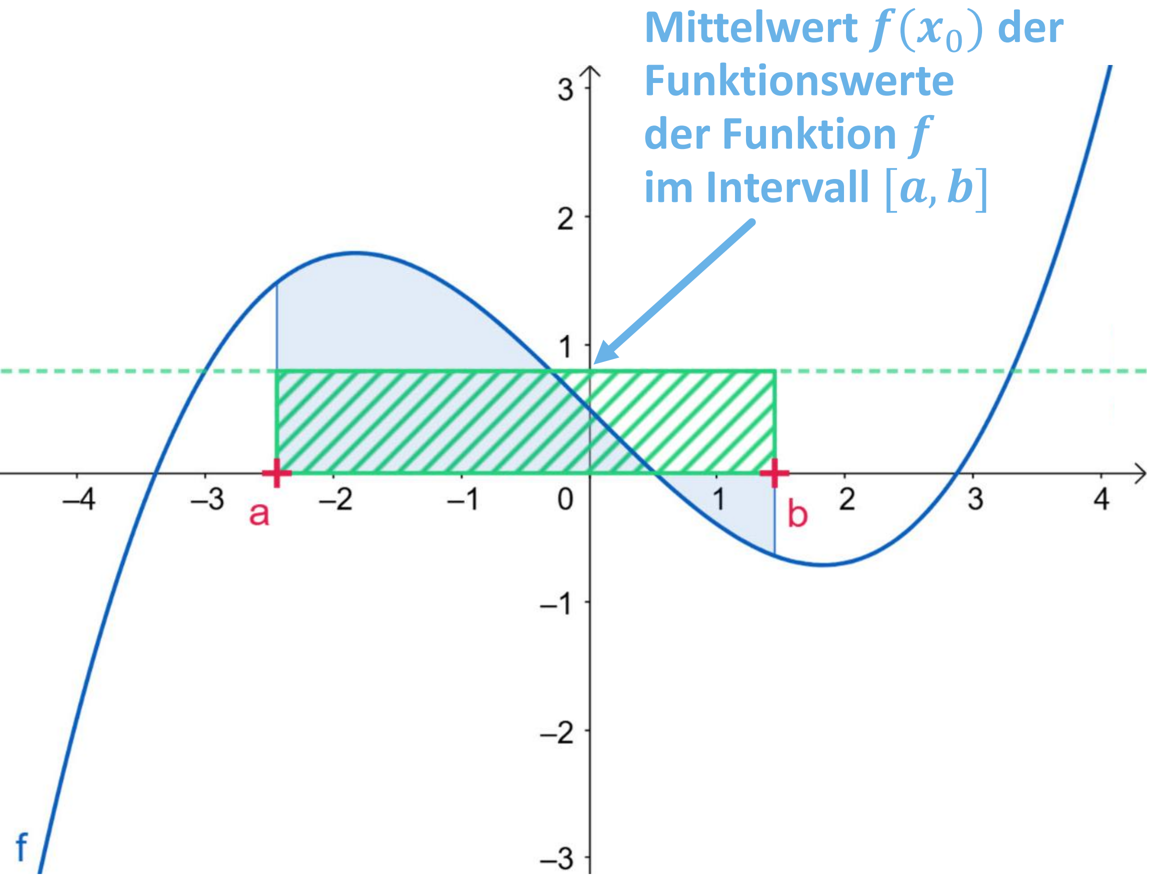
Verständnisanker
Füllmenge einer Wanne mit bekannter Zu- und Abflussgeschwindigkeit.





Grundvorstellung
Integrieren als Kumulieren
Ein bestimmtes Integral ist das Ergebnis des Aufsummierens von Summanden mit Produktstruktur.

Grundvorstellung: Integrieren als Mitteln



Grundvorstellung Integrieren als Mitteln

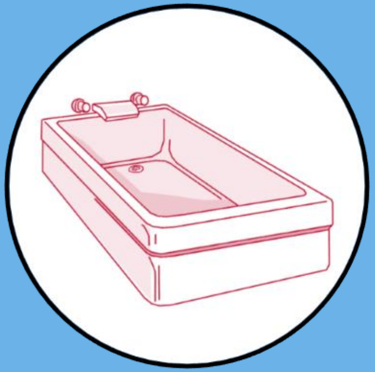
Ein bestimmtes Integral mittelt die Funktionswerte der Integrandenfunktion im Integrationsintervall.

Mittlerer Funktionswert

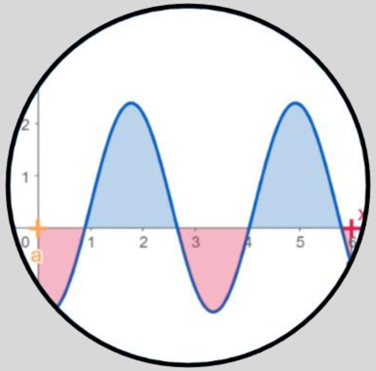
- Mit dem mittleren Funktionswert $f(x_0)$ in einem Intervall $[a, b]$ kann der orientierte Flächeninhalt $I_a(b)$ unter dem Graph von f als (orientiertes) Rechteck realisiert werden.
- Damit gilt: $I_a(b) = (b - a) \cdot f(x_0)$
- Für den Mittelwert $f(x_0)$ folgt:

$$f(x_0) = \frac{1}{b-a} \cdot I_a(b)$$

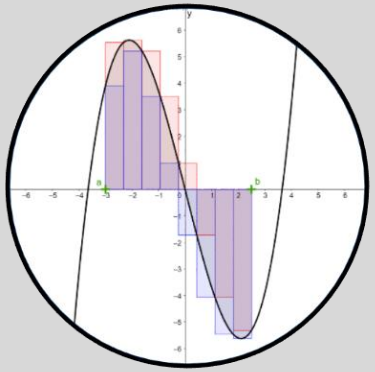
Grundvorstellungen zum Integralbegriff



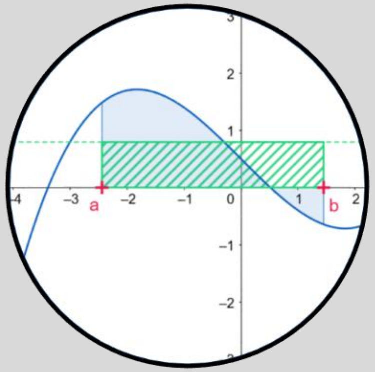
Rekonstruieren



Bestimmen eines orientierten Flächeninhalts



Kumulieren



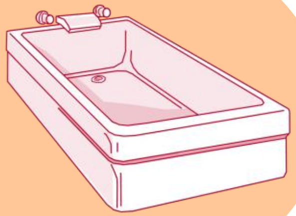
Mitteln

Greefrath, G. & Ulm, V. (2021). Integral: Grundvorstellungen dynamisch visualisieren. *Mathematik lehren, 224*, S. 36-40
Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren, 199*, 2-8

Grundvorstellung:
Integrieren als Rekonstruieren

Vgl. GV „Ableitung als lokale Änderungsrate"

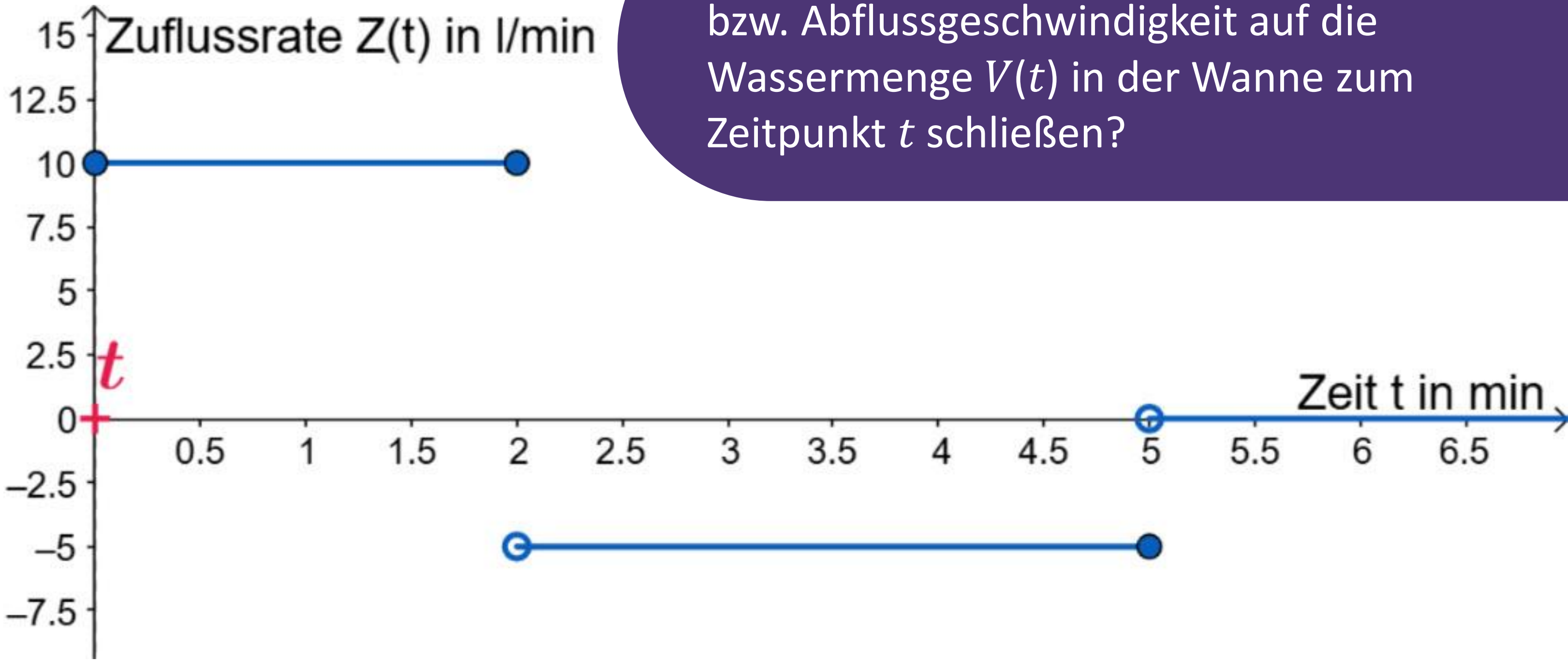
Verständnisanker
Füllmenge einer Wanne bei bekannter Zu- und Abflussgeschwindigkeit.



Situation
In eine leere Badewanne wird 2 Minuten lang Wasser mit konstanter Zuflussgeschwindigkeit von 10 Litern pro Minute eingelassen.

Anschließend wird die Wasserzufuhr gestoppt und gleichzeitig der Abfluss geöffnet, aus dem das Wasser mit einer Abflussgeschwindigkeit von 5 Litern pro Minute abfließt.

Nach weiteren 3 Minuten wird der Abfluss wieder geschlossen.



Frage: Wie lässt sich aus der Zufluss- bzw. Abflussgeschwindigkeit auf die Wassermenge $V(t)$ in der Wanne zum Zeitpunkt t schließen?

Wassermenge die zwischen 0 min und 2 min **in** das Becken fließt:

$$10\frac{l}{\text{min}} \cdot (2\text{ min} - 0\text{ min})$$
$$= 10\,\frac{l}{\text{min}} \cdot 2\text{ min} = 20\;l$$

Wassermenge die zwischen 2 min und 5 min **aus** dem Becken fließt:

$$-5\,\frac{l}{\text{min}} \cdot (5\text{ min} - 2\text{ min})$$
$$= -5\,\frac{l}{\text{min}} \cdot 3\text{ min} = -15\;l$$

Grundvorstellung:
Integrieren als Rekonstruieren

Verständnisanker
Füllmenge einer Wanne mit bekannter Zu- und Abflussgeschwindigkeit.

Zufluss-Phase: Wassermenge die zwischen $0\ \mathrm{min}$ und $2\ \mathrm{min}$ **in** die Wanne fließt:

$$10\frac{l}{\mathrm{min}} \cdot (2\ \mathrm{min} - 0\ \mathrm{min}) = 10\,\frac{l}{\mathrm{min}} \cdot 2\ \mathrm{min} = 20\ l$$

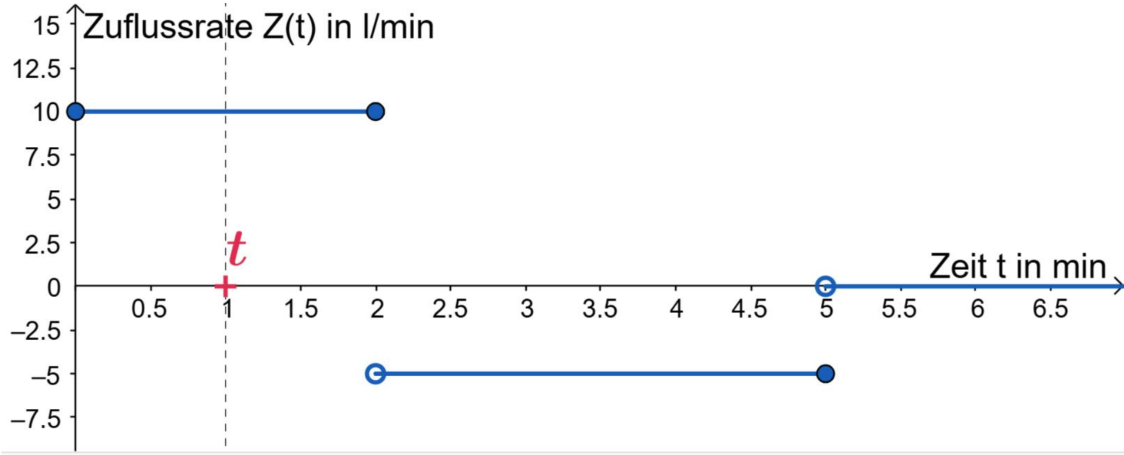
Allgemein gilt für die Wassermenge $V(t)$ in der Wanne zum Zeitpunkt t mit $0 \leq t \leq 2$: $\boldsymbol{V(t) = 10 \cdot t}$

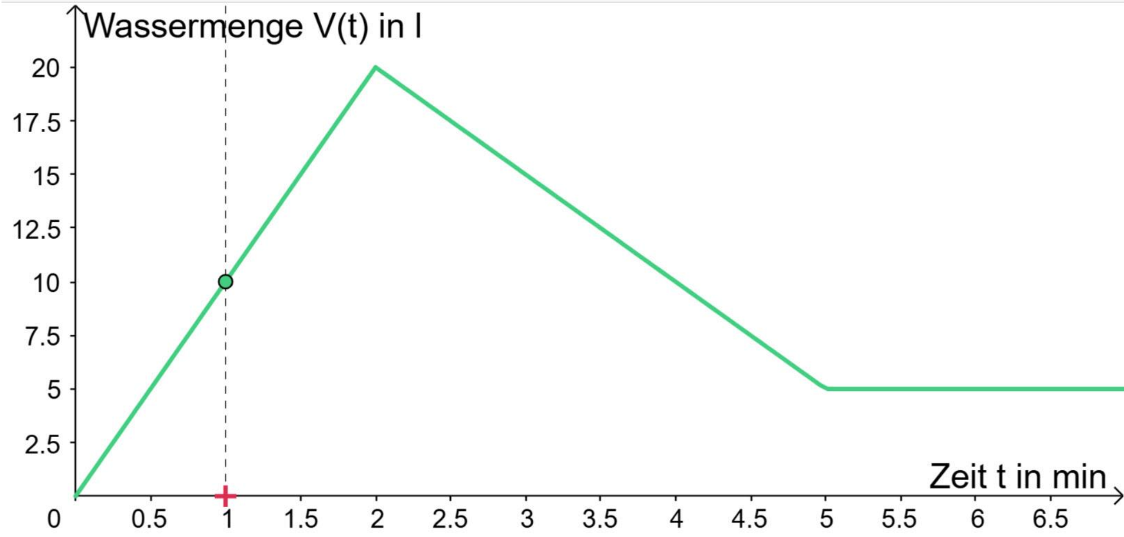
Abfluss-Phase: Wassermenge die zwischen $2\ \mathrm{min}$ und $5\ \mathrm{min}$ **aus** der Wanne fließt:

$$-5\frac{l}{\mathrm{min}} \cdot (5\ \mathrm{min} - 2\ \mathrm{min}) = -5\,\frac{l}{\mathrm{min}} \cdot 3\ \mathrm{min} = -15\ l$$

Nach $5\ \mathrm{min}$ sind also $20 - 5 \cdot (5 - 2) = 5$ Liter Wasser in der Wanne.

Allgemein gilt für die Wassermenge $V(t)$ in der Wanne zum Zeitpunkt t mit $2 < t \leq 5$: $\boldsymbol{V(t) = 20 - 5 \cdot (t - 2)}$





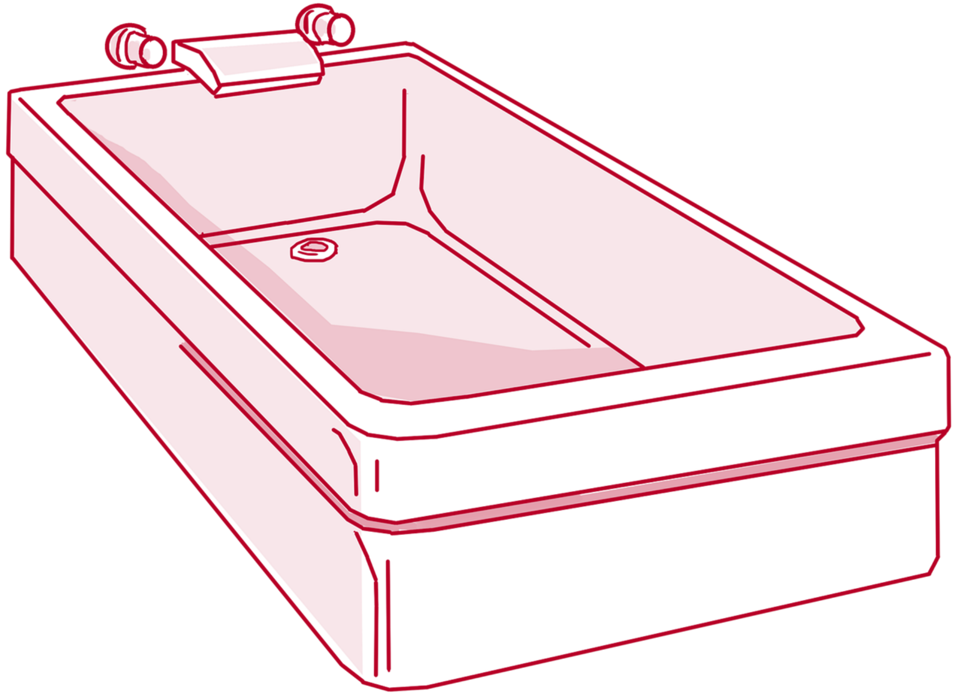
$$V(t) = \begin{cases} 10 \cdot t & \text{für} \quad 0 \leq t \leq 2 \\ 20 - 5 \cdot (t - 2) & \text{für} \quad 1 < t \leq 5 \\ 5 & \text{für} \quad t > 5 \end{cases}$$

Grundvorstellung:
Integrieren als Rekonstruieren

Verständnisanker
Füllmenge einer Wanne mit bekannter Zu- und Abflussgeschwindigkeit.

Rückblick

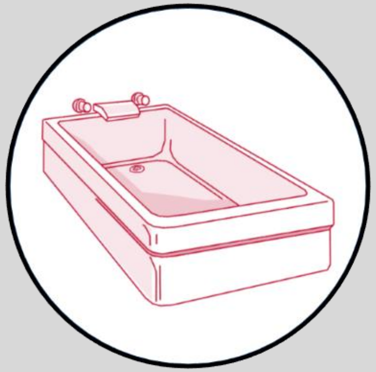
- Aus der Zuflussgeschwindigkeit des Wassers wurde die Wassermenge $V(t)$ rekonstruiert.
- Die Zuflussgeschwindigkeit ist die (momentane) Änderungsrate der Wassermenge in der Wanne.
- Aus der Änderungsrate $Z(t)$ wurde die Bestandsfunktion $V(t)$ wiederhergestellt.
  [wiederherstellen = integrare (lat.)]



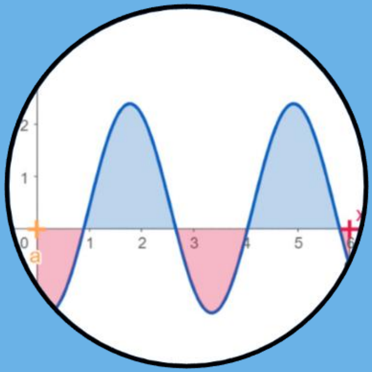
Grundvorstellung
Integrieren als Rekonstruieren

Ein bestimmtes Integral rekonstruiert die Gesamtänderung einer Größe (den Gesamteffekt der Änderung) aus ihrer Änderungsrate.

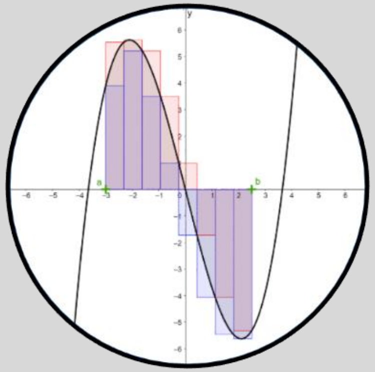
Grundvorstellungen zum Integralbegriff



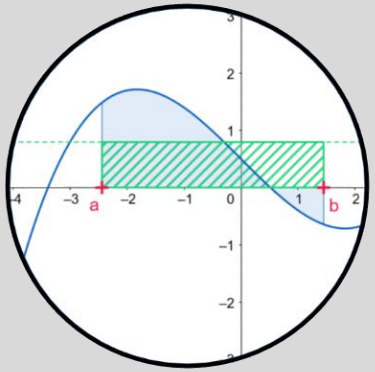
Rekonstruieren



Bestimmen eines orientierten Flächeninhalts



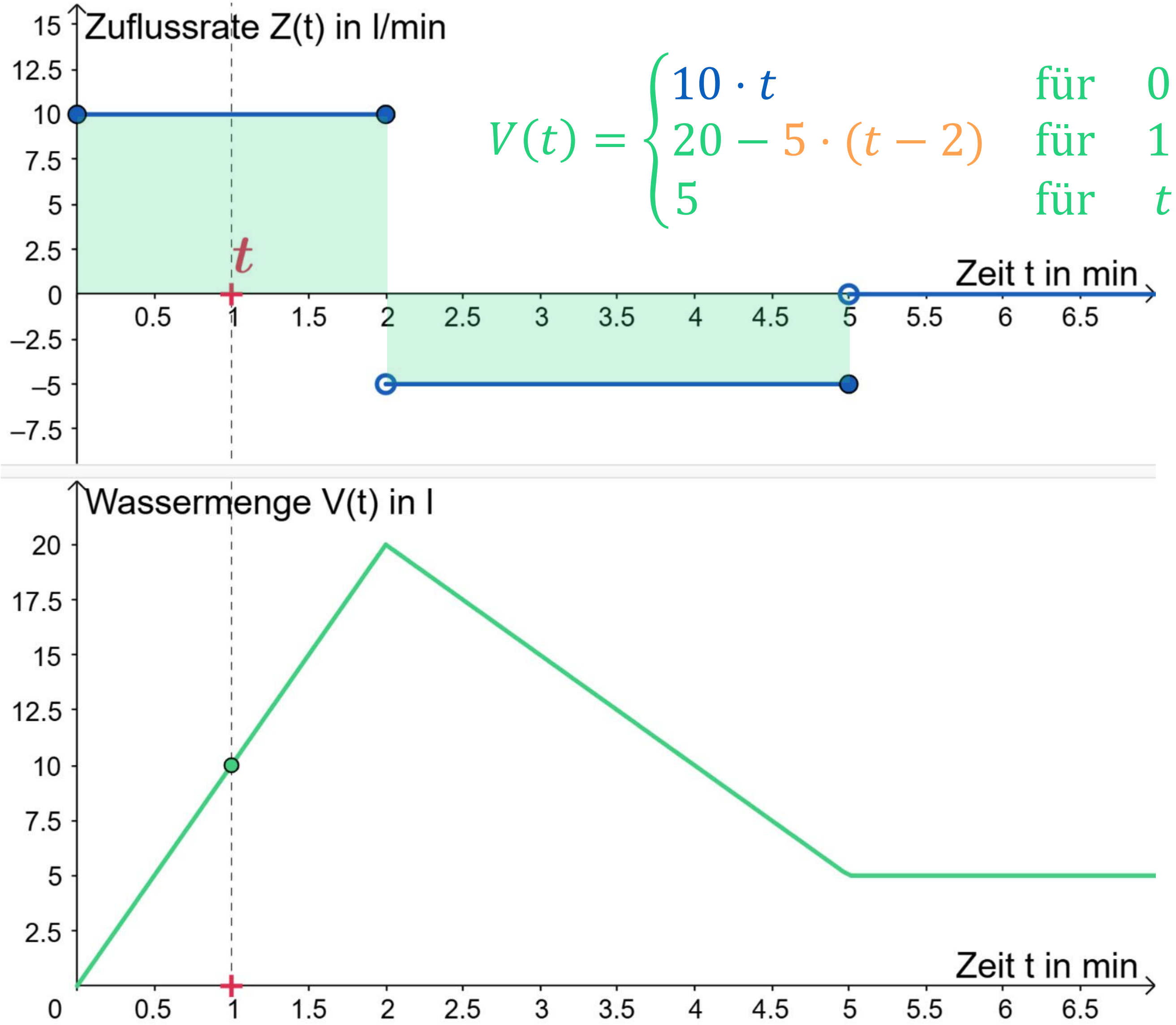
Kumulieren



Mitteln

Greefrath, G. & Ulm, V. (2021). Integral: Grundvorstellungen dynamisch visualisieren. *Mathematik lehren, 224*, S. 36-40
Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren, 199*, 2-8

Grundvorstellung: Integrieren als Bestimmen eines orientierten Flächeninhalts



$$V(t) = \begin{cases} 10 \cdot t & \text{für} \quad 0 \leq t \leq 2 \\ 20 - 5 \cdot (t-2) & \text{für} \quad 1 < t \leq 5 \\ 5 & \text{für} \quad t > 5 \end{cases}$$

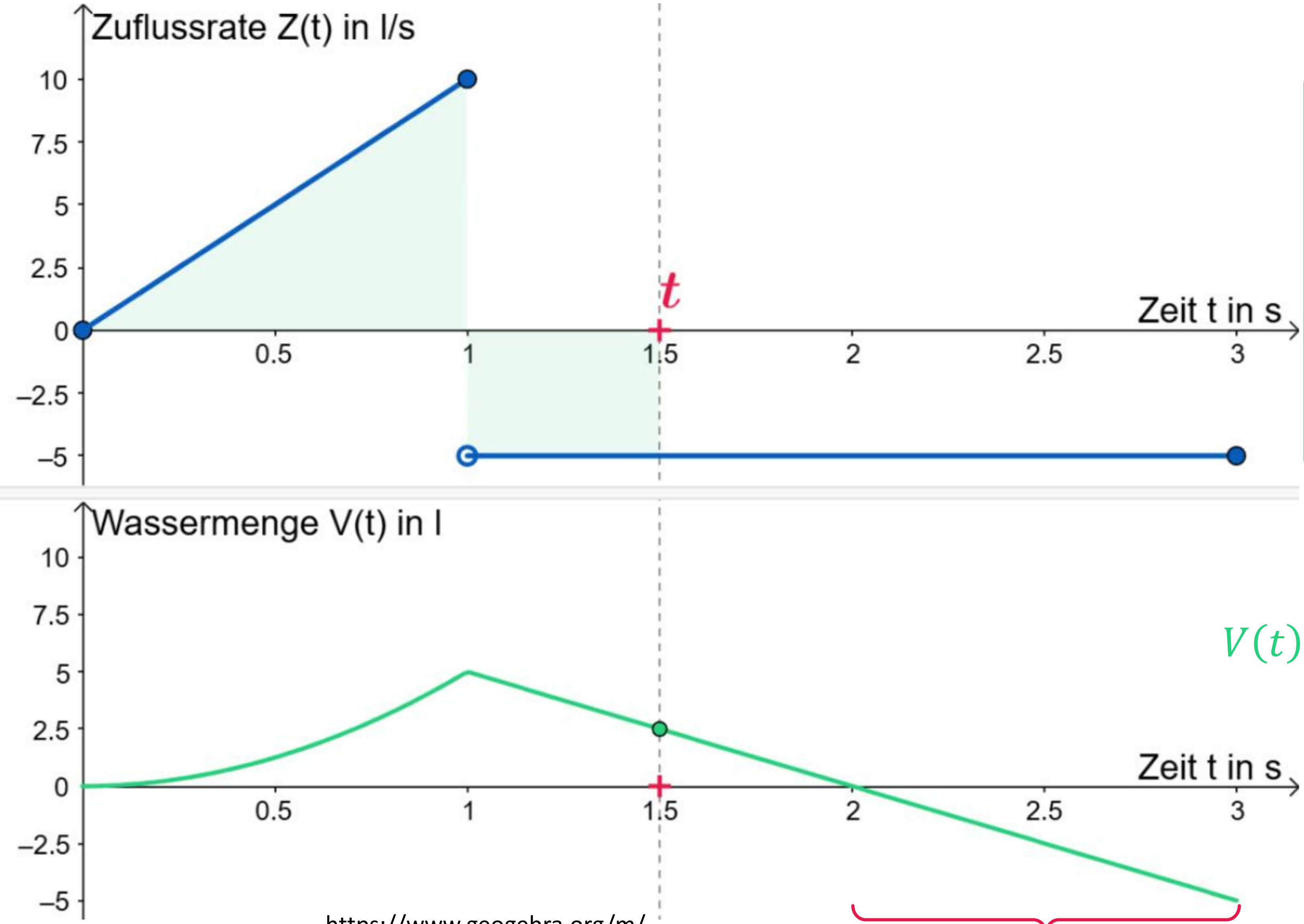
Verständnisanker
Füllmenge einer Wanne bei bekannter Zu- und Abflussgeschwindigkeit.

Die Produkte $10 \cdot t$ und $5 \cdot (t-1)$ können als Flächeninhalte von Rechtecken gedeutet werden.

$V(t)$ kann als Summe vorzeichenbehafteter Flächeninhalte von Rechtecken, also als **orientierter Flächeninhalt**, gedeutet werden.

Grundvorstellung: Integral als orientierter Flächeninhalt

Verständnisanker
Füllmenge einer Wanne mit bekannter Zu- und Abflussgeschwindigkeit.



Die Produkte $\frac{1}{2} \cdot t \cdot 10t$ und $5 \cdot (t-1)$ können als Flächeninhalte eines Dreiecks bzw. eines Rechtecks gedeutet werden.

$V(t)$ kann als die Summe vorzeichenbehafteter Flächeninhalte, also als **orientierter Flächen-inhalt**, gedeutet werden.

$$V(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot t \cdot 10t & \text{für} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{2} \cdot 10 - 5 \cdot (t-1) & \text{für} \quad t > 1 \end{cases}$$

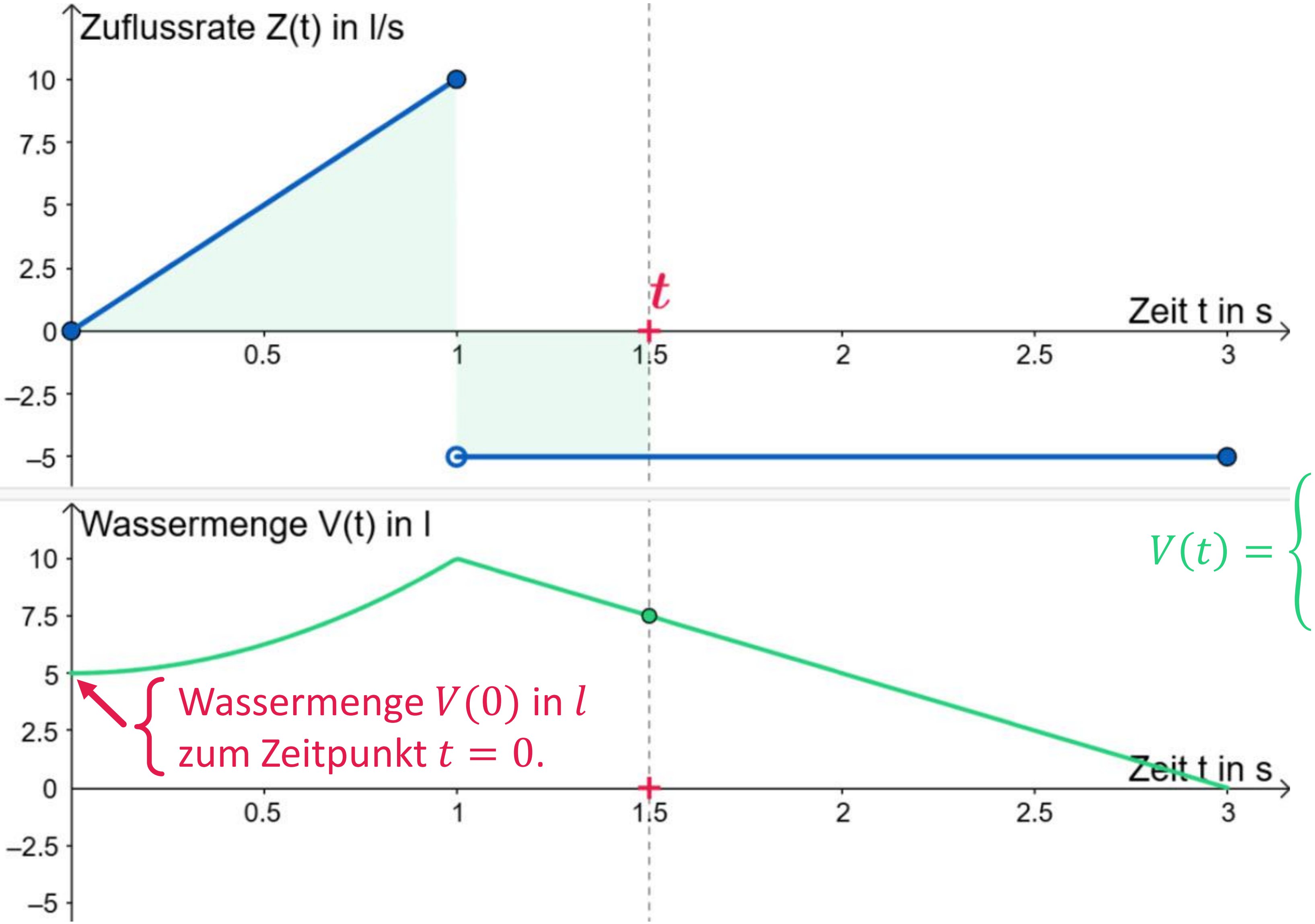
https://www.geogebra.org/m/nxxgghx3#material/xzbwhbkb

Negative Wassermenge?

RPTU

Grundvorstellung: Integral als orientierter Flächeninhalt

Verständnisanker
Füllmenge einer Wanne mit bekannter Zu- und Abflussgeschwindigkeit.



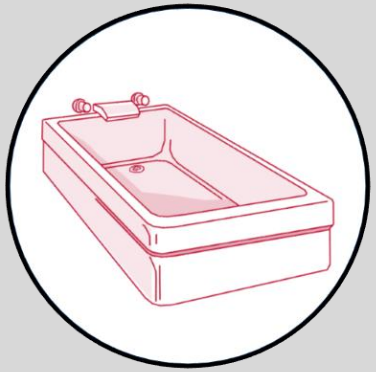
Bemerkung
Der aktuelle Bestand ergibt sich aus dem rekonstruierten Gesamteffekt der Änderung und dem **Anfangsbestand** zu Beginn der betrachteten Änderungen.

$$V(t) = \begin{cases} 5 + \frac{1}{2} \cdot t \cdot 10t & \text{für} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 5 + \frac{1}{2} \cdot 10 - 5 \cdot (t-1) & \text{für} \quad t > 1 \end{cases}$$

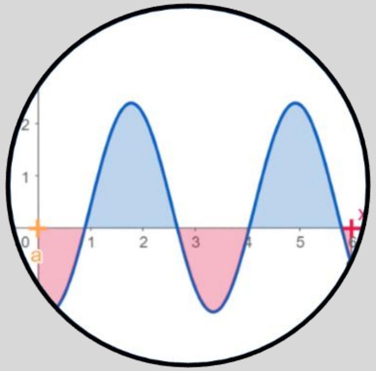
Grundvorstellung Integrieren als Bestimmen eines orientier-ten Flächeninhalts
Ein bestimmtes Integral ist eine Bilanz von Flächeninhalten.

https://www.geogebra.org/m/nxxgghx3#material/xzbwhbkb

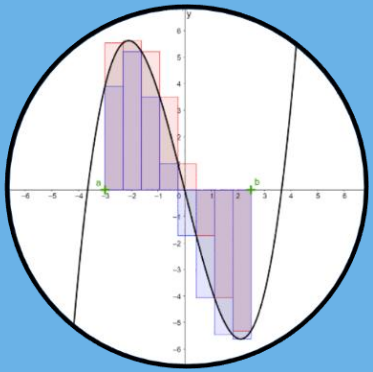
Grundvorstellungen zum Integralbegriff



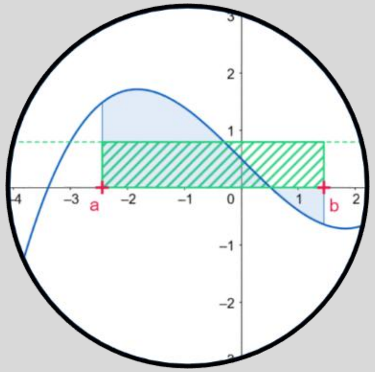
Rekonstruieren



Bestimmen eines orientierten Flächeninhalts



Kumulieren



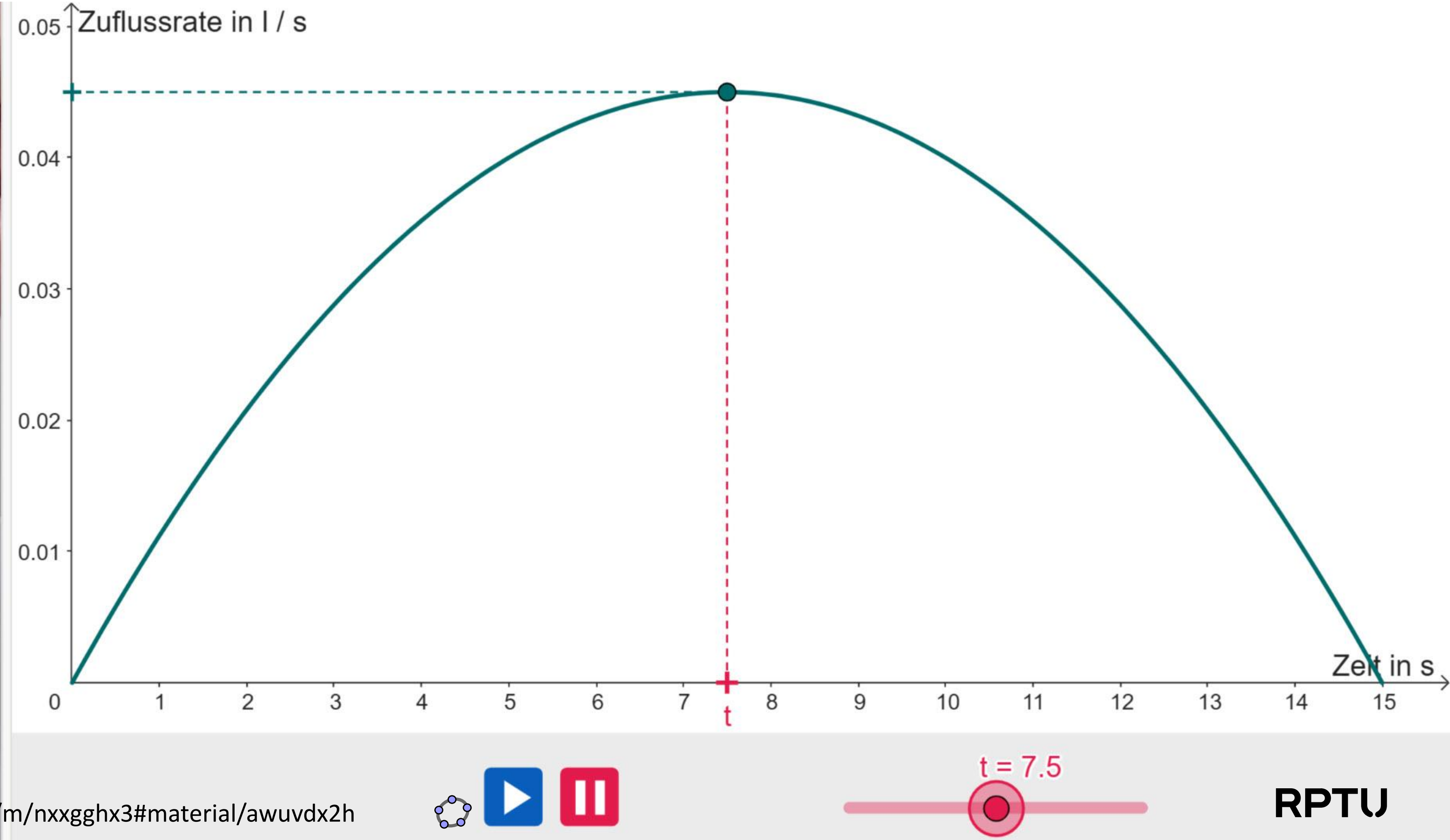
Mitteln

Greefrath, G. & Ulm, V. (2021). Integral: Grundvorstellungen dynamisch visualisieren. *Mathematik lehren, 224*, S. 36-40
Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung – Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren, 199*, 2-8

Verständnisanker: Wanne

Verständnisanker
Füllmenge einer Wanne mit bekannter Zu- und Abflussgeschwindigkeit.

Frage: Wie kann man den Gesamteffekt aus den Änderungsraten rekonstruieren, wenn der Zufluss bzw. Abfluss **nicht linear** ist?



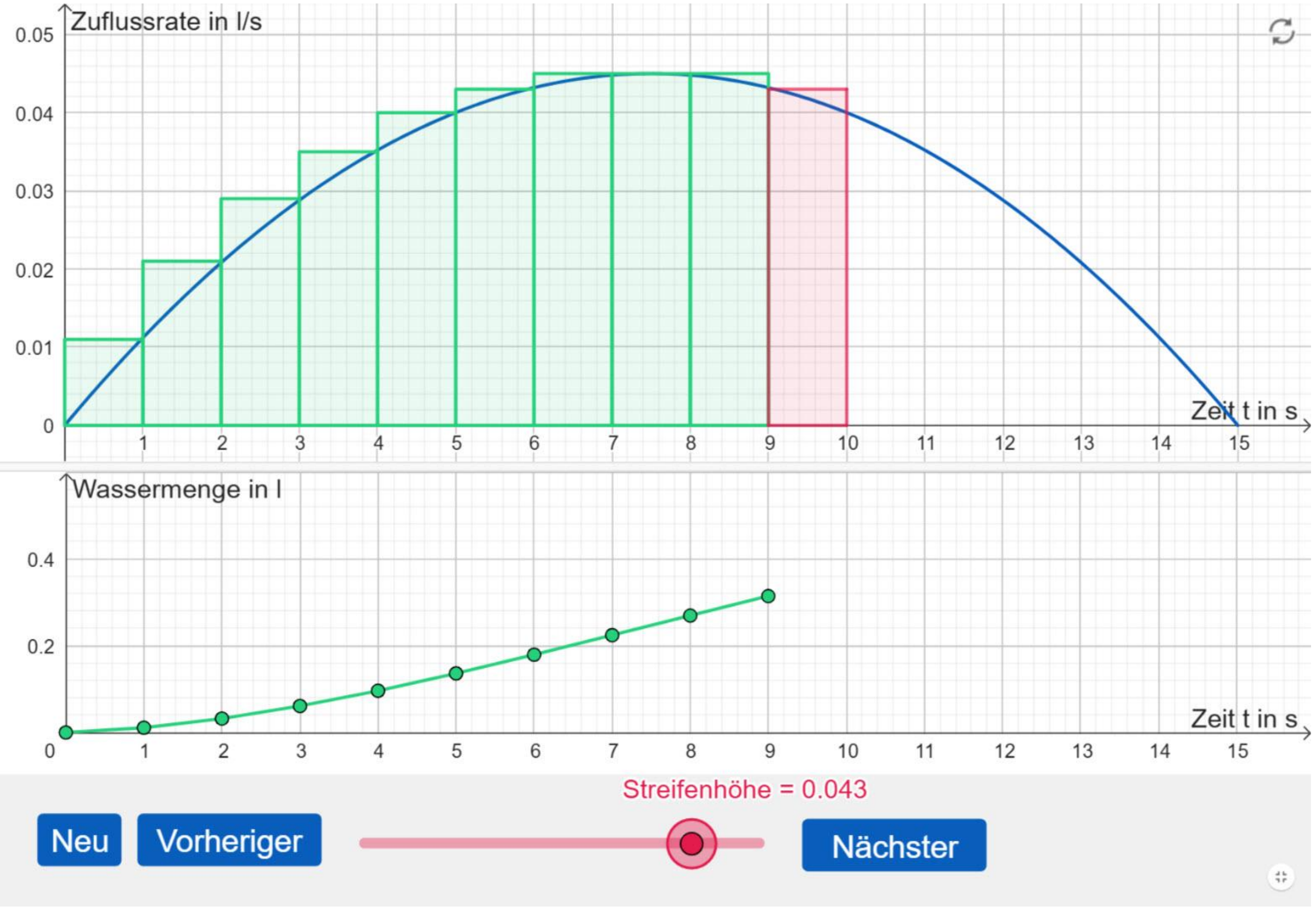
https://www.geogebra.org/m/nxxgghx3#material/awuvdx2h

RPTU

Grundvorstellung:
Integrieren als Kumulieren

Verständnisanker
Füllmenge einer Wanne mit bekannter Zu- und Abflussgeschwindigkeit.

Frage: Wie kann man den Gesamteffekt aus den Änderungsraten rekonstruieren, wenn der Zufluss bzw. Abfluss **nicht linear** ist?



Idee: Analytische Annäherung

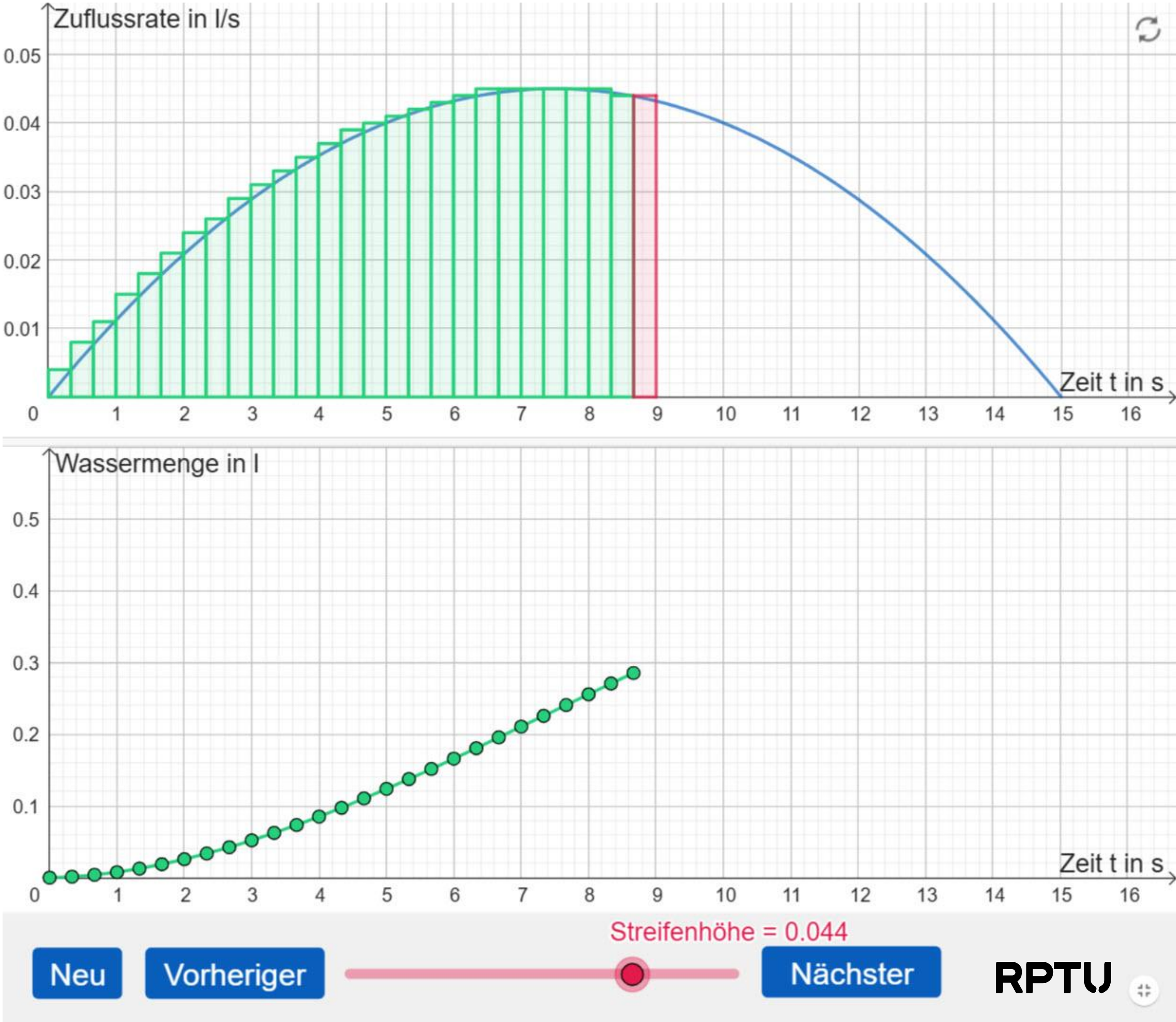
- Die Zuflussrate ist bei genügend kleinen Zeitintervallen nahezu konstant.
- Wenn man das Zeitintervall in n kleine zueinander gleichgroße Teilintervalle zerlegt, kann man vorgehen, wie in der Abbildung dargestellt.
- Der Gesamteffekt ist also eine Summe von Produkten aus der Teilintervall-Breite und dem (gewählten) Funktionswert der Zuflussrate im Teilintervall.

Grundvorstellung:
Integrieren als Kumulieren

Verständnisanker
Füllmenge einer Wanne mit bekannter Zu- und Abflussgeschwindigkeit.

Erkenntnis: Nichtlinearer Zufluss

- Zur Rekonstruktion der Wassermenge zu einem beliebigen Zeitpunkt t sind die Zuwächse über alle Teilintervalle zu summieren, in die das Intervall $[0; t]$ zerlegt wurde.
- Geometrisch gedeutet, ist der rekonstruierte Wert $V(t)$ eine Summe aus kleinen *orientierten* Rechteckinhalten.
- Diese unterscheidet sich bei genü-gend kleiner Streifenbreite beliebig wenig vom *orientierten* Inhalt der Fläche unter dem Graph von V'.



https://www.geogebra.org/m/nxxgghx3#material/dbse5zby

RPTU

Ober- und Untersumme

Definition für Schülerinnen und Schüler

Definition: Ober- und Untersumme

Die Funktion f sei im abgeschlossenen Intervall $[a;b]$ definiert und beschränkt.

Für eine Zerlegung des Intervalls $[a;b]$ in $n \in \mathbb{N}$ gleichlange Teilintervalle der Länge $\frac{b-a}{n}$ sind

$m_1, \dots, m_n$ die **minimalen Funktionswerte** ★ und
$M_1, \dots, M_n$ die **maximalen Funktionswerte** ★
von f im Teilintervall 1, … bzw. n.

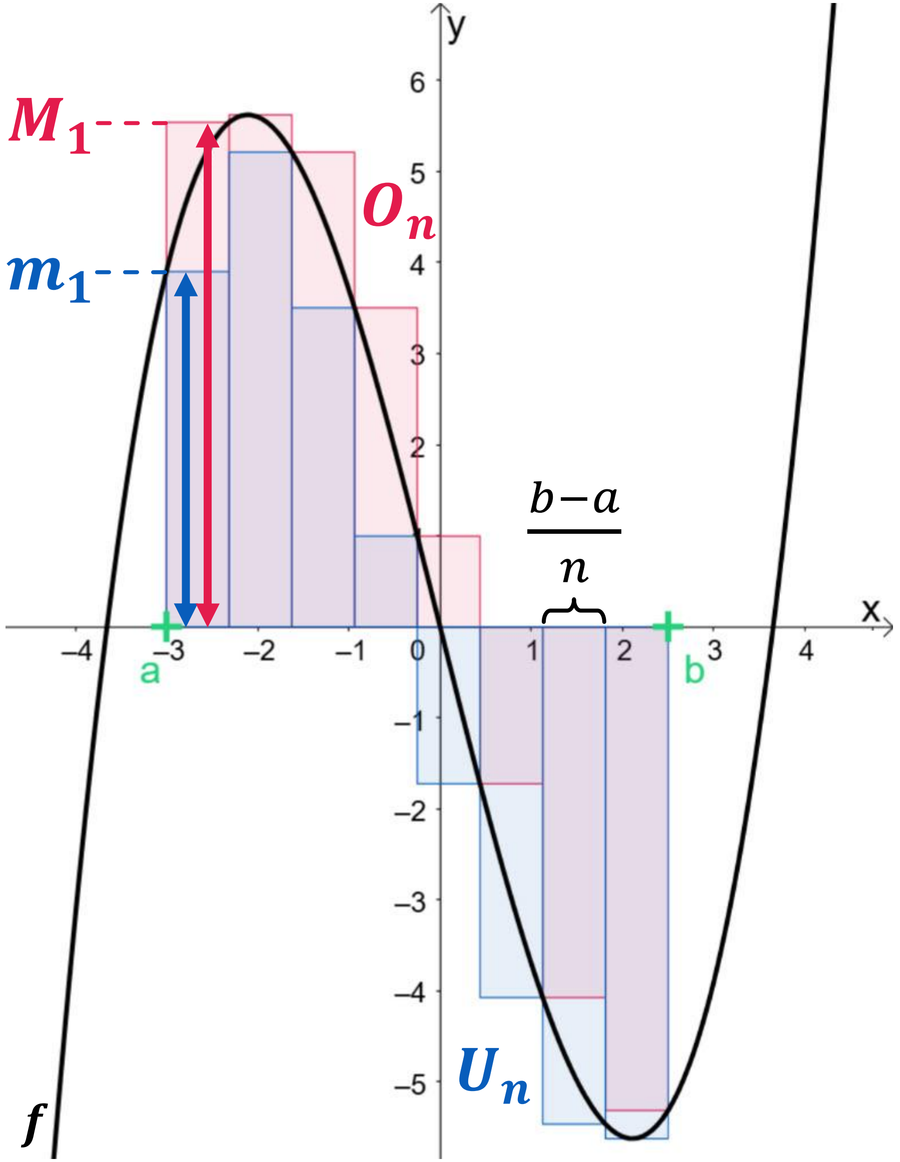
Dann heißen

$$U_n = m_1 \cdot \frac{b-a}{n} + \cdots + m_n \cdot \frac{b-a}{n}$$

die **Untersumme** und

$$O_n = M_1 \cdot \frac{b-a}{n} + \cdots + M_n \cdot \frac{b-a}{n}$$

die **Obersumme** von f zu dieser Zerlegung.

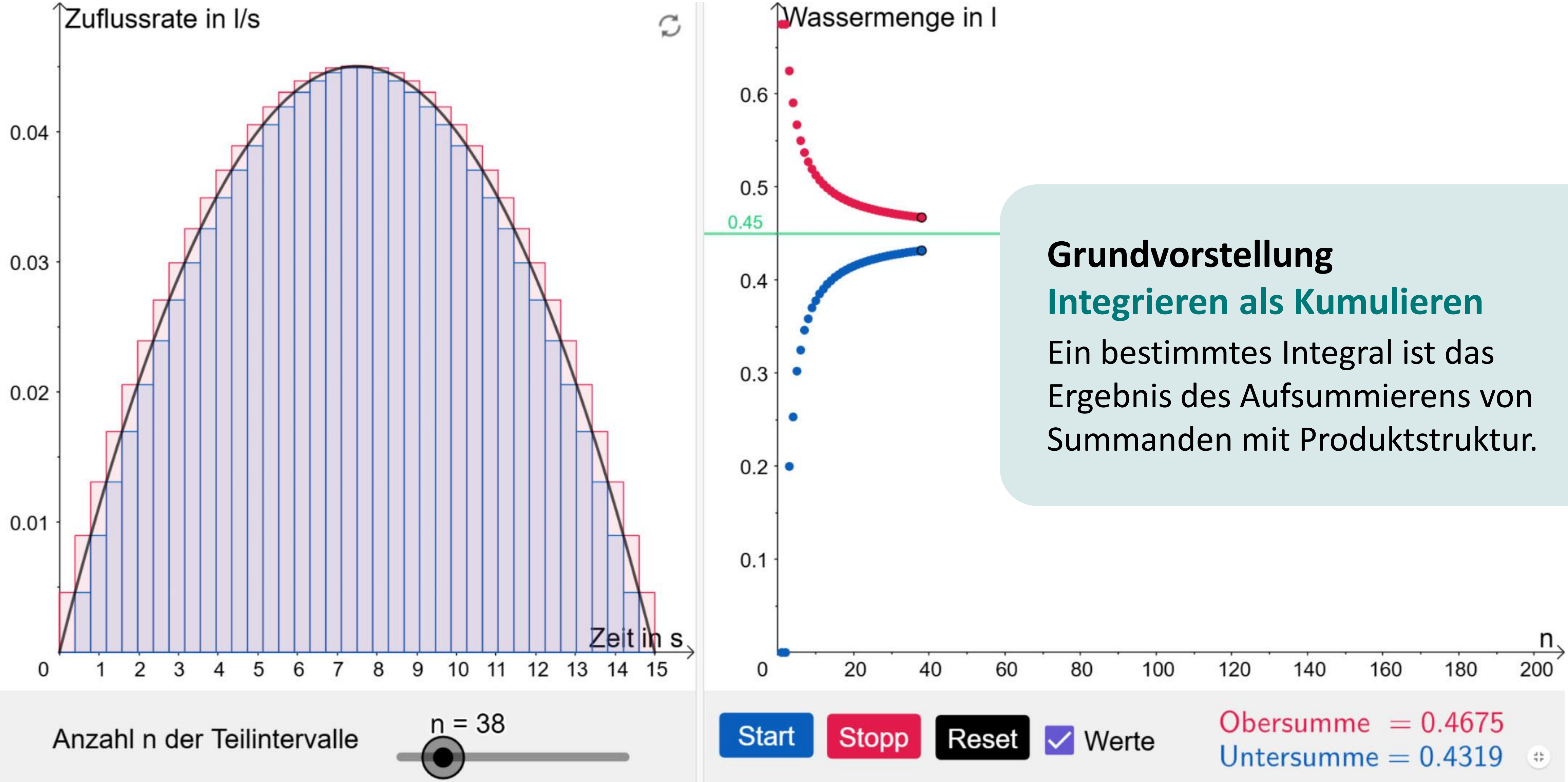


https://www.geogebra.org/m/nxxgghx3#material/ymwrj8cy

★★ Da es bei nicht-stetigen Funktionen vorkommen kann, dass f in $[a;b]$ das Maximum (größter Funktionswert) und / oder Minimum (kleinster Funktionswert) nicht annimmt, wird in der Definition der Ober- und Untersumme genauer das Supremum (kleinste obere Schranke für die Funktionswerte) bzw. das Infimum (größte untere Schranke für die Funktionswerte) genutzt.

Grundvorstellung:
Integrieren als Kumulieren

Verständnisanker
Füllmenge einer Wanne mit bekannter Zu- und Abflussgeschwindigkeit.



Grundvorstellung
Integrieren als Kumulieren
Ein bestimmtes Integral ist das Ergebnis des Aufsummierens von Summanden mit Produktstruktur.

 https://www.geogebra.org/m/nxxgghx3#material/hphzndud

Bestimmtes Integral und Integrierbarkeit
Definition für Schülerinnen und Schüler

Didaktik der Mathematik Sekundarstufen

Definition: Bestimmtes Integral & Integrierbarkeit

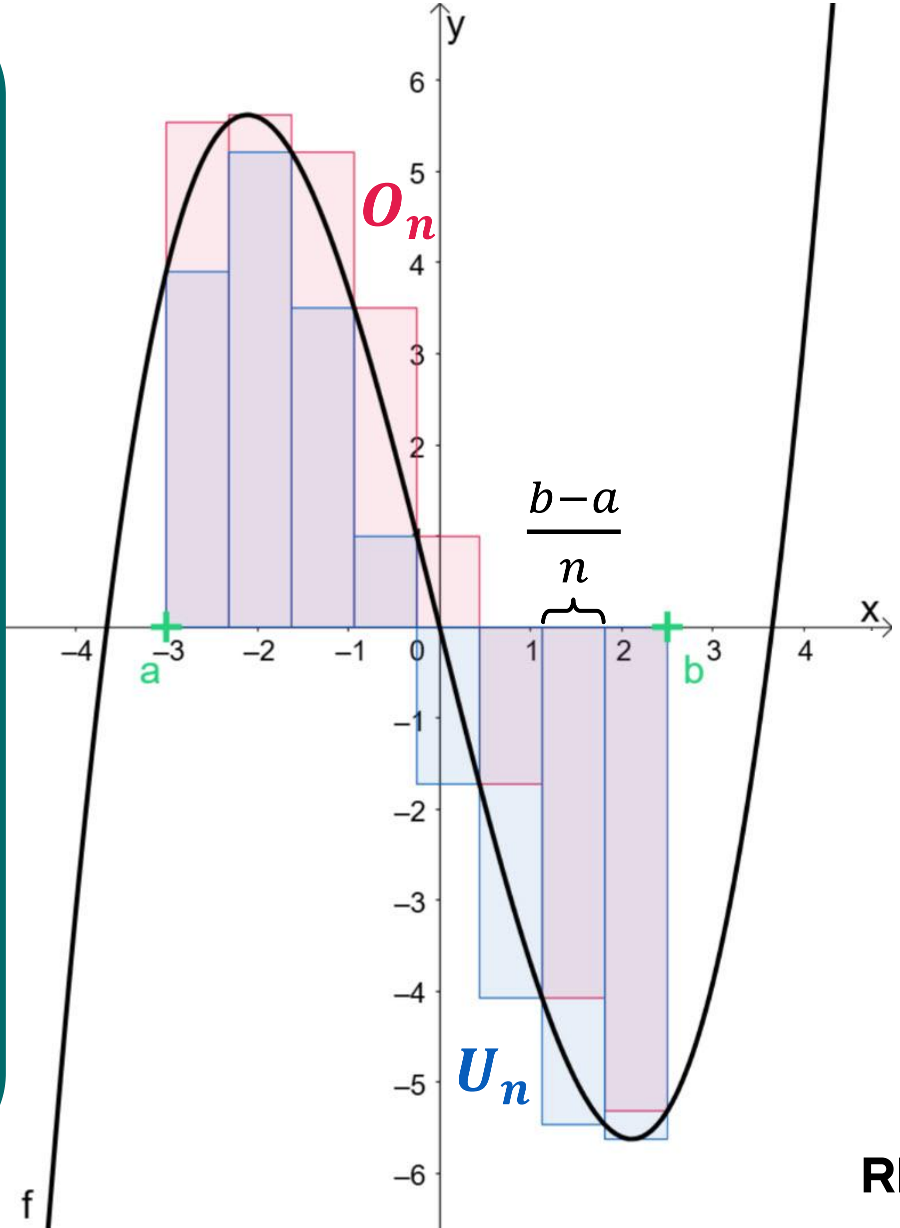
Wenn

- eine Funktion f im abgeschlossenen Intervall $[a; b]$ definiert und beschränkt ist,
- U_n die **Untersumme** und O_n die **Obersumme** von f für Zerlegungen des Intervalls $[a; b]$ in $n \in \mathbb{N}$ gleichlange Teilintervalle der Länge $\frac{b-a}{n}$ sind und
- $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \lim\limits_{n\to\infty} O_n$,

dann heißt

(1) die Zahl $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} O_n$ **bestimmtes Integral** von f über dem Intervall $[a; b]$, und wird mit $\int_a^b f(x)dx$ bezeichnet,

(2) die Funktion f **integrierbar** über dem Intervall $[a; b]$.



RPTU

Kontakt

Jan Lucas Fischer

Henrik Ossadnik

RPTU
Rheinland-Pfälzische Technische Universität
Kaiserslautern-Landau
Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen)
Fortstraße 7, 76829 Landau

dms.nuw.rptu.de